ივანე ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

გიორგი ტეფნაძე

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ერთ და ორგანზომილებიან ერთპარამეტრიან მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე კერძო ჯამებისა და მარცინკევიჩ-ფეიერის საშუალოების შესახებ

სადოქტორო ნაშრომი

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი

უშანგი გოგინავა

უნივერსიტეტის გამომცემლობა

თბილისი 2016

რეზიუმე

ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების კლასიკური თეორიისგან განსხვავებით, უოლშის ფუნქციები წარმოადგენს "მართკუთხა ტალღებს". ასეთი ტალღები უკვე ხშირად გამოიყენება სიგნალთა გადაცემის და კოდირების თეორიებში, კრიპტოგრაფიაში, ფილტრაციის, გამოსახულების გაუმჯობესების და ციფრული სიგნალების დამუშავებისთვის.

პრობლემატიკას, რომელიც შესწავლილია სადოქტორო ნაშრომში ცენტრალურია მათემატიკურ ანალიზში. ისინი მოითხოვენ ტექნიკას, რომელიც უმეტესწილად განვითარდა უკანასკნელი სამი ათეული წლის განმავლობაში.

სადოქტორო ნაშრომში ჩვენ ვიხილავთ ერთგანზომილებიანი და ორგანზომილებიანი უოლშის სისტემის მიმართ კერძო ჯამების, ფეიერისა და მარცინკევიჩის საშუალოების კრებადობის და შეჯამებადობის საკითხებს ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებზე.

სადოქტორო ნაშრომი ძირითადად ორიენტირებულია შემდეგი მთავარი თემების კვლევაზე:

• ერთგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივის კერძო ჯამების ქვემიმდევრობების კრებადობის და განშლადობის რიგის შესწავლა მარტინგალურ ჰარდის $H_p(G)$ სივრცეებზე, როცა $0 < p \leq 1$.

• აუცილებელი და საკმარისი პირობების პოვნა უწყვეტობის მოდულის ტერმინებში, რომლებიც უზრუნველყოფენ ერთგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივის კერძო ჯამების ქვემიმდევრობების კრებადობას მარტინგალურ ჰარდის $H_p(G)$ სივრცეებზე, როცა $0 < p \leq 1$.

• ერთგანზომილებიანი უოლშის სისტემის მიმართ ფეიერის საშუალოების ქვემიმდევრობების კრებადობის და განშლადობის რიგის შესწავლა მარტინგალურ ჰარდის $H_p(G)$ სივრცეებზე, როცა $0 < p \leq 1/2$.

• აუცილებელი და საკმარისი პირობების პოვნა უწყვეტობის მოდულის ტერმინებში, რომლებიც უზრუნველყოფენ ერთგანზომილებიანი უოლშის სისტემის მიმართ ფეიერის საშუალოების ქვემიმდევრობების კრებადობას მარტინგალურ ჰარდის $H_p(G)$ სივრცეებზე, როცა $0 < p \leq 1/2$.

• ერთგანზომილებიანი უოლშის სისტემის მიმართ ფეიერის საშუალოების ძლიერად შეჯამებადობა მარტინგალურ ჰარდის $H_p(G)$ სივრცეებზე, როცა $0 < p \leq 1/2$.

• ორგანზომილებიანი უოლშ-ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების დიაგონალური ქვემიმდევრობების ძლიერად შეჯამებადობა მარტინგალურ ჰარდის $H_p(G^2)$ სივრცეებზე, როცა $0 < p < 1$.

• ორგანზომილებიანი უოლშის სისტემის მიმართ მარცინკევიჩის საშუალოების ძლიერად შეჯამებადობა მარტინგალურ ჰარდის $H_{2/3}(G^2)$ სივრცეში.

• აუცილებელი და საკმარისი პირობების პოვნა უწყვეტობის მოდულის ტერმინებში, რომლებიც უზრუნველყოფენ ორგანზომილებიანი უოლშის სისტემის მიმართ მარცინკევიჩის საშუალოების კრებადობას მარტინგალურ ჰარდის $H_{2/3}(G^2)$ სივრცეში.

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

George Tephnadze

Faculty of Exact and Natural Sciences

Department of Mathematics

On the Partial Sums and Marcinkiewicz-Fejér Means on the One- and Two-dimensional One-parameter Martingale Hardy Spaces

PhD Thesis

Scientific Supervisor:

Doctor of Phys. Math. Sciences

Ushangi Goginava

Tbilisi 2016

Abstract

Unlike the classical theory of Fourier series which deals with decomposition of a function into continuous waves, the Walsh functions are "rectangular waves". Such waves have already been used frequently in the theory of signal transmission, codic theory, cryptography, filtering, image enhancement and digital signal processing.

The problems we have studied in this PhD thesis are central to Mathematical Analysis. They involve techniques which have been developed a great deal during the last three decades.

In this PhD thesis we are dealing with convergence and summability of partial sums, Fejér and Marcinkiewicz means with respect to one- and two-dimensional Walsh-Fourier series on the martingale Hardy spaces.

This thesis is focus to achieve the following main results:

• To find estimation of convergence and divergence of the subsequences of partial sums of the one-dimensional Walsh-Fourier series on the martingale Hardy spaces $H_p(G)$, when $0 < p \leq 1$.

• To find necessary and sufficient conditions in terms of modulus of continuity of Hardy spaces, for which subsequences of partial sums of the one-dimensional Walsh-Fourier series convergence on the martingale Hardy spaces $H_p(G)$, when $0 < p \leq 1$.

• To find estimation of convergence and divergence of the subsequences of Fejér means of the one-dimensional Walsh-Fourier series on the martingale Hardy spaces $H_p(G)$, when $0 < p \leq 1/2$.

• To find necessary and sufficient conditions in terms of modulus of continuity of Hardy spaces, for which subsequences of Fejér means of the one-dimensional Walsh-Fourier series convergence on the martingale Hardy spaces $H_p(G)$, when $0 < p \leq 1/2$.

• To prove strong summability of one-dimensional Fejér means with respect to Walsh system on the martingale Hardy spaces $H_p(G)$, when $0 < p \leq 1/2$.

• To prove strong summability of diagonal partial sums with respect to two-dimensional Walsh-Fourier series on the martingale Hardy spaces $H_p(G^2)$, when $0 < p < 1$.

• To prove strong summability of Marcinkiewicz means with respect to two-dimensional Walsh-Fourier series in $H_{2/3}(G^2)$ space.

• To find necessary and sufficient conditions in terms of modulus of continuity of Hardy spaces, for which Marcinkiewicz means of the two-dimensional Walsh-Fourier series converge in $H_{2/3}(G^2)$ space.

სარჩევი

საკვანძო სიტყვები: უოლშის ჯგუფი, უოლშის სისტემა, L_p სივრცე, weak-L_p სივრცე, უწყვეტობის მოდული, ფურიე-უოლშის კოეფიციენტი, ფურიე-უოლშის მწკრივი, კერძო ჯამი, ლებეგის კონსტანტა, ფეიერის საშუალო, ორობითი მარტინგალი, ერთგანზომილებიანი ჰარდის სივრცე, ორგანზომილებიანი ჰარდის სივრცე, მაქსიმალური ოპერატორი, ძლიერად შეჯამებადობა.

წინასიტყვაობა

პრობლემატიკას, რომელთა დამუშავებას ისახავს მიზნად მოცემული დისერტაცია, ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია მათემატიკურ ანალიზში. კლასიკური ორთონორმირებული სისტემების მიმართ ინტეგრებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივის სხვადასხვა საშუალოებით შეჯამებადობის საკითხს დიდი ისტორია გააჩნია. ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები არსებითად განსაზღვრავდნენ და ახლაც განსაზღვრავენ ფუნქციათა თეორიაში და ჰარმონიულ ანალიზში მთელი რიგი მიმართულებების პრობლემატიკას.

კლასიკური თეორიისგან განსხვავებით, უოლშის ფუნქციები წარმოადგენს "მართკუთხა ტალღებს". ასეთი ტალღები უკვე ხშირად გამოიყენება ფიზიკაში, ბიოლოგიაში, მედიცინაში, სიგნალთა გადაცემის თეორიაში, ფილტრაციის, გამოსახულების გაუმჯობესების და ციფრული სიგნალების დამუშავებისთვის. ამ მიმართულებების განვითარებისთვის მნიშვნელოვანი გახდა ახალი ორთონორმირებული სისტემების განხილვა, რომელთა შორის ერთ-ერთი აქტუალურია უოლშის სისტემა. უოლშის ფუნქციები ღებულობენ მხოლოდ ორ მნიშვნელობას, რაც აადვილებს თეორიული შედეგების კომპიუტერულ ალგორითმიზაციას და მათ პრაქტიკაში გამოყენებებს.

ფურიე-უოლშის მწკრივების თეორია წარმოადგენს აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მიმართულებას, სადაც შეისწავლება ორთონორმირებული სისტემები, რომელთა თვისებები ძირითადად განპირობებულია ტოპოლოგიური ჯგუფის სტრუქტურით. უოლშის სისტემა არის მნიშვნელოვანი მოდელი, რომელზედაც შეიძლება ილუსტრირება აბსტრაქტული ანალიზის მრავალი ფუნდამენტალური დებულებისა.

სადოქტორო დისერტაციაში ჩვენ განვიხილავთ ერთგანზომილებიანი და ორგანზომილებიანი უოლშის სისტემის მიმართ კერძო ჯამების, ფეიერის და მარცინკევიჩის საშუალოების კრებადობის და შეჯამებადობის საკითხებს ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებზე.

სადოქტორო ნაშრომი მოიცავს შემდეგ თავებს:

- შესავალი

- ერთანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების კერძო ჯამები მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე

- ერთგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების ფეიერის საშუალოები მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე

- ორგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების შეჯამებადობა მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე

პირველ თავში განხილული იქნება ზოგიერთი კლასიკური შედეგი და ცნობილი ფაქტი, რომელიც მნიშვნელოვანია ფურიეს მწკრივების თეორიაში და მეტად არსებითია სადოქტორო დისერტაციაში განხილული პრობლემატიკისთვის. ასევე მოყვანილი იქნება დისერტაციაში დამტკიცებული შედეგები და ხაზგასმული იქნება მათი აქტუალობა, სიახლე და ზოგიერთ უკვე ცნობილ შედეგებთან უკუკავშირი.

მეორე თავში მოყვანილი იქნება უოლშის ჯგუფის და უოლშის სისტემის ძირითადი განმარტებები და აღნიშვნები, რომლებიც მნიშვნელოვანია ჰარმონიული ანალიზის თეორიის განვითარებისთვის ლოკალურად კომპაქტურ აბელურ ჯგუფებზე. ასევე შესწავლილი იქნება ერთგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივის კერძო ჯამების და ლებეგის კონსტანტების სხადასხვა წარმოდგენები და შეფასებები. მოყვანილი იქნება მარტინგალური ჰარდის სივრცეების ძირითადი განმარტებები და ამ თეორიის ფუნდამეტური თეორემები, რომლებიც მეტად არსებითია სადოქტორო დისერტაციაში განხილული შედეგების დასამტკიცებლად. აგებული იქნება ჰარდის სივრცეების მარტინგალების მაგალითი, რომლებიც გამოიყენება დადებითი შედეგების განუზოგადებლობის საჩვენებლად. ამის შემდეგ დადგენილი იქნება ერთგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივის კერძო ჯამების ქვემიმდევრობების კრებადობის და განშლადობის რიგი მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე $H_p(G)$, როცა $0 < p \leq 1$, რომელთა დახმარებითაც $H_p(G)$ სივრცის უწყვეტობის მოდულის ტერმინებში ასევე ნაპოვნი იქნება აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ერთგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივის კერძო ჯამების ქვემიმდევრობების კრებადობას მარტინგალურ ჰარდის $H_p(G)$ სივრცეებზე, როცა $0 < p \leq 1$.

მესამე თავში მოყვანილი იქნება ფეიერის საშუალოების განმარტებები და ძირითადი აღნიშვნები. ასევე შესწავლილი იქნება ერთგანზომილებიანი ფეიერის საშუალოების გულების სხადასხვა წარმოდგენები და შეფასებები. შემდეგ შესწავლილი იქნება ერთგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივის მიმართ ფეიერის საშუალოების ქვემიმდევრობების კრებადობის და განშლადობის რიგი მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე, როცა $0 < p \leq 1/2$, რომელთა დახმარებითაც ასევე ნაპოვნი იქნება აუცილებელი და საკმარისი პირობები $H_p(G)$ ჰარდის სივრცის უწყვეტობის მოდულის ტერმინებში, რომლებიც უზრუნველყოფენ ერთგანზომილებიანი უოლშის-ფურიეს მწკრივის ფეიერის საშუალოების ქვემიმდევრობების კრებადობას მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე, როცა $0 < p \leq 1/2$. მესამე თავის ბოლოს, დამტკიცებული იქნება ერთგანზომილებიანი ფეიერის საშუალოების ძლიერად შეჯამებადობა მარტინგალურ ჰარდის $H_p(G)$ სივრცეებზე, როცა $0 < p \leq 1/2$.

მეოთხე თავში მოყვანილი იქნება ორგანზომილებიანი ფურიეს მწკრივების და მარცინკევიჩის საშუალოების განმარტებები და ძირითადი აღნიშვნები. შესწავლილი იქნება ორგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივის მარცინკევიჩის საშუალოების გულების შეფასებები. განხილული იქნება ორგანზომილებიანი მარტინგალური ჰარდის სივრცეების ძირითადი ასპექტები და ამ თეორიის ფუნდამეტური თეორემები, რომლებიც მეტად მნიშვნელოვანია სადოქტორო დისერტაციის ძირითადი შედეგების დასამტკიცებლად. დადგენილი იქნება ორგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივის დიაგონალური კერძო ჯამების ძლიერად შეჯამებადობა მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე, როცა $0 < p < 1$. ასევე, დადგენილი იქნება ორგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივის მიმართ მარცინკევიჩის საშუალოების ძლიერად შეჯამებადობა მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე, როცა $p = 2/3$. ასევე ნაპოვნი იქნება $H_{2/3}(G^2)$ სივრცის უწყვეტობის მოდულის ტერმინებში ისეთი აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ორგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივის მარცინკევიჩის საშუალოების ქვემიმდევრობების კრებადობას მარტინგალურ ჰარდის $H_{2/3}(G^2)$ სივრცეში.

სადისერტაციო ნაშრომში გამოყენებულია შემდეგი ექვსი სტატია:

[1] G. Tephnadze, Strong convergence of two-dimensional Walsh-Fourier series, Ukr. Math. J., 65, (6), (2013), 822-834.

[2] G. Tephnadze, Strong convergence theorems of Walsh-Fejér means, Acta Math. Hung., 142 (1) (2014), 244–259.

[3] K. Nagy and G. Tephnadze, Approximation by Walsh-Marcinkiewicz means on the Hardy space $H_{2/3}$, Kyoto J. Math., 54 (3), (2014), 641-652.

[4] G. Tephnadze, On the partial sums of Walsh-Fourier series, Colloquium Mathematicum, 141, 2 (2015), 227-242.

[5] G. Tephnadze, On the convergence of Fejér means of Walsh-Fourier series in the space H_p, J. Contemp. Math. Anal., 51, 2 (2016), 51-63.

[6] K. Nagy and G. Tephnadze, Strong convergence theorem for Walsh-Marcinkiewicz means, Math. Inequal. Appl., 19, 1 (2016), 185–195.

შესავალი

კარგად ცნობილი (იხ. წიგნები [21] და [30]), რომ ნებისმიერი $p > 1$-თვის არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\|S_n f\|_p \leq c_p \|f\|_p \,, \quad \text{როცა} \quad p > 1 \quad \text{და} \quad f \in H_1(G).$$

მეორე მხრივ, ასევე ცნობილია (დეტალებისთვის იხ. [1] და [30]), რომ უოლშის სისტემა არ ქმნის ბაზისს $L_1(G)$ სივრცეში. უფრო მეტიც არსებობს ფუნქცია $f \in H_1(G)$-ში, ისეთი, რომ მისი ფურიე-უოლშის მწკრივის კერძო ჯამები არ არის შემოსაზღვრული $L_1(G)$ სივრცეში.

ლებეგის კონსტანტების

$$L(n) := \|D_n\|_1$$

დახმარებით ადვილად დავასკვნით (დეტალებისთვის იხ. [2] და [30]), რომ ინტეგრებადი ფუნქციის ფურიე-უოლშის მწკრივის კერძო ჯამების $S_{n_k} f$ ქვემიმდევრობა კრებადია f-კენ L_1 ნორმით, მაშინ და მხოლოდ მაშინ

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} L(n_k) \leq c < \infty. \tag{1.1}$$

მას შემდეგ რაც, უოლშის სისტემის მიმართ ლებეგის კონსტანტების შეფასება ხდება $n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j 2^j, (n_j \in Z_2)$ ნატურალური რიცხვის ვარიაციის საშუალებით

$$V(n) = n_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |n_k - n_{k-1}|$$

და ადგილი აქვს შემდეგ ორმხრივ უტოლობას (დეტალებისთვის იხ. [30])

$$\frac{1}{8} V(n) \leq L(n) \leq V(n)$$

ზემოთ მოყვანილი (1.1) პირობა შეიძლება შეიცვალოს მისი ექვივალენტური პირობით

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} V(n_k) \leq c < \infty.$$

ასევე კარგადაა ცნობილი (დეტალებისთვის იხ. წიგნები [30] და [51]), რომ ფურიე-უოლშის მწკრივის კერძო ჯამების S_{2^n} ქვემიმდევრობა არის შემოსაზღვრული $H_p(G)$-დან $H_p(G)$-ში, ნებისმიერი $p > 0$-თვის, საიდანაც დავასკვნით, რომ

$$\|S_{2^n} f - f\|_{H_p(G)} \to 0, \quad \text{როცა} \quad n \to \infty, \tag{1.2}$$

მეორე მხრივ, (იხ. [43]) არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$ $(0 < p < 1)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_{2^n+1} f\|_{weak-L_p(G)} = \infty.$$

კერძო ჯამების $S_{2^n+1}f$ ქვემიმდევრობის განშლადობის მიზეზი არის ის (დეტალებისთვის იხ. [44]), რომ $f\in H_p(G)$ მარტინგალის ფურიეს კოეფიციენტები საზოგადოდ არ არიან აბსულუტურად შემოსაზღვრულები, როცა $0<p<1$.

როცა $0<p<1$ მაშინ [49]-ში დადგენილი იქნა ფურიე-უოლშის სისტემის კერძო ჯამების ქვემიმდევრობების შემოსაზღვრულობის საკითხი $H_p(G)$-დან $H_p(G)$-ში. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა T1. ვთქვათ $f\in H_p(G)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\left\|S_{m_k}f\right\|_{H_p(G)}\leq c_p\left\|f\right\|_{H_p(G)}$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა დაკმაყოფილებულია შემდეგი პირობა

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}d\left(m_k\right)<c<\infty, \tag{1.3}$$

სადაც

$$d\left(m_k\right):=\left|m_k\right|-\left\langle m_k\right\rangle.$$

კერძოდ, თეორემა T1-დან დაუყოვნებლივ მივიღებთ:

თეორემა T2. ვთქვათ $p>0$ და $f\in H_p(G)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\left\|S_{2^n}f\right\|_{H_p(G)}\leq c_p\left\|f\right\|_{H_p(G)}$$

და

$$\left\|S_{2^n+2^{n-1}}f\right\|_{H_p(G)}\leq c_p\left\|f\right\|_{H_p(G)}.$$

მეორე მხრივ, გვაქვს შემდეგი უარყოფითი შედეგი:

თეორემა T3. ვთქვათ $p>0$. მაშინ არსებოს მარტინგალი $f\in H_p(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|S_{2^n+1}f\right\|_{H_p(G)}=\infty.$$

ყოველივე ამის გათვალისწინებით, საინტერესოა დადგენილ იქნას ფურიე-უოლშის მწკრივის კერძო ჯამების სხვადასხვა ქვემიმდევრობების განშლადობის რიგის დადგენა $H_p(G)$ სივრცეებზე.

სადისერტაციო ნაშრომის მეორე თავში (იხ. აგრეთვე [45]) ამომწურავი პასუხია გაცემული ამ კითხვებზე. როცა $0<p<1$ სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2.3.1. ვთქვათ $f\in H_p(G)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ სამართლიანია უტოლობა

$$\left\|S_nf\right\|_{H_p(G)}\leq c_p2^{d(n)(1/p-1)}\left\|f\right\|_{H_p(G)}. \tag{1.4}$$

მეორე მხრივ, თუ $0<p<1$, $\{m_k:\ k\geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}d\left(m_k\right)=\infty \tag{1.5}$$

და $\Phi:\mathbb{N}_+\rightarrow[1,\infty)$ არის არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{k\rightarrow\infty}}\frac{2^{d(m_k)(1/p-1)}}{\Phi\left(m_k\right)}=\infty.$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|\frac{S_{m_k}f}{\Phi\left(m_k\right)}\right\|_{weak-L_p(G)}=\infty.$$

თეორემა 2.3.1-დან ადვილად მიიღება შემდეგი:

შედეგი 2.3.1. ვთქვათ $0<p<1$ და $f\in H_p(G)$. მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\left\|S_nf\right\|_{H_p(G)}\leq c_p\left(n\mu\left\{\text{supp}\left(D_n\right)\right\}\right)^{1/p-1}\left\|f\right\|_{H_p(G)}.$$

მეორე მხრივ, თუ $0<p<1$ და $\{m_k:\ k\geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}m_k\mu\left\{\text{supp}\left(D_{m_k}\right)\right\}=\infty$$

და $\Phi:\mathbb{N}_+\rightarrow[1,\infty)$ არის არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{k\rightarrow\infty}}\frac{\left(m_k\mu\left\{\text{supp}\left(D_{m_k}\right)\right\}\right)^{1/p-1}}{\Phi\left(m_k\right)}=\infty,$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f\in H_p(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|\frac{S_{m_k}f}{\Phi\left(m_k\right)}\right\|_{weak-L_p(G)}=\infty.$$

კერძოდ, აქედან მიიღება თეორემა T1-ის და თეორემა T2-ის სამართლიანობა.

სადისერტაციო ნაშრომის მეორე თავში ასევე განხილულია $p=1$ შემთხვევა და ნაჩვენებია შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

თეორემა 2.3.2. ვთქვათ $n\in\mathbb{N}_+$ და $f\in H_1(G)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c, ისეთი, რომ

$$\left\|S_nf\right\|_{H_1(G)}\leq cV\left(n\right)\left\|f\right\|_{H_1(G)}. \tag{1.6}$$

უფრო მეტიც, თუ $\{m_k:\ k\geq 0\}$ არის დადებითი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა $\mathbb{N}_+$, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}V\left(m_k\right)=\infty$$

და $\Phi:\mathbb{N}_+\rightarrow[1,\infty)$ არის არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{k\rightarrow\infty}}\frac{V\left(m_k\right)}{\Phi\left(m_k\right)}=\infty.$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f\in H_1(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|\frac{S_{m_k}f}{\Phi\left(m_k\right)}\right\|_1=\infty.$$

როცა $0<p<1$ მაშინ [49]-ში დადგენილი იქნა ფურიე-უოლშის სისტემის კერძო ჯამების ქვემიმდევრობების შესაბამისი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის საკითხი $H_p(G)$-დან $L_p(G)$-ში. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა T4. ვთქვათ $0 < p < 1$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}|S_{m_k}f|$$

შემოსაზღვრულია $H_p(G)$-დან $L_p(G)$-ში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა დაკმაყოფილებულია (1.3) პირობა.

კერძოდ, აქედან მიიღება შემდეგი თეორემების სამართლიანობა:

თეორემა T5. ვთქვათ $p > 0$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}|S_{2^n}f|\right\|_p \leq c_p\|f\|_{H_p(G)} \tag{1.7}$$

და

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}|S_{2^n+2^{n-1}}f|\right\|_p \leq c_p\|f\|_{H_p(G)}.$$

მეორე მხრივ, გვაქვს შემდეგი უარყოფითი შედეგი:

თეორემა T6. ვთქვათ $p > 0$. მაშინ არსებოს მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}|S_{2^n+1}f|\right\|_p = \infty.$$

ზემოთ მოცემული (1.3) პირობა არის საკმარისი $p = 1$ -თვისაც, მაგრამ არსებობს ისეთი ქვემიმდევრობები, რომლებიც არ აკმაყოფილებენ ამ პირობას, მაგრამ ფურიე-უოლშის მწკრივის კერძო ჯამების შესაბამისი მაქსიმალური ოპერატორები არიან შემოსაზღვრულები $H_1(G)$ -დან $L_1(G)$ -ში.

თუმცა დღემდე უცნობია ისეთი აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომლებიც დაახასიათებენ კერძო ჯამების მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობას $H_1(G)$ -დან $L_1(G)$ -ში.

[44]-ში და [49]-ში განხილულ იქნა წონიანი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობა $H_p(G)$-დან $L_p(G)$-ში, როცა $0 < p \leq 1$:

თეორემა T7. ვთქვათ $0 < p \leq 1$. მაშინ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორი

$$\tilde{S}{}_p^{*}f := \sup_{n\in\mathbb{N}_+}\frac{|S_nf|}{(n+1)^{1/p-1}\log^{[p]}(n+1)}$$

შემოსაზღვრულია $H_p(G)$-დან $L_p(G)$-ში, სადაც $[p]$ აღნიშნავს p ნამდვილი რიცხვის მთელ ნაწილს.

უფრო მეტიც, ნებისმიერი არაკლებადი $\varphi : \mathbb{N}_+ \to [1, \infty)$ ფუნქციისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{(n+1)^{1/p-1}\log^{[p]}(n+1)}{\varphi(n+1)} = +\infty,$$

არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$ $(0 < p \leq 1)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\frac{S_nf}{\varphi(n)}\right\|_p = \infty.$$

ფურიე-უოლშის მწკრივის კერძო ჯამების წონიანი მაქსიმალური ოპერატორების შესახებ ზემოთ მოყვანილი უარყოფითი თეორემიდან ჩვენ დავასკვნით:

თეორემა S1. არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$, $(0 < p \leq 1)$, ისეთი რომ

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n f\|_p = \infty.$$

მეორე მხრივ, წონიანი მაქსიმალური ოპერატორების ზემოთ მოყვანილი შემოსაზღვრულობის თეორემიდან მივიღებთ:

თეორემა S2. ვთქვათ $0 < p \leq 1$. მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$\|S_n f\|_p \leq c_p (n+1)^{1/p-1} \log^{[p]}(n+1) \|f\|_{H_p(G)}, \text{ როცა } 0 < p \leq 1,$$

სადაც $[p]$ აღნიშნავს p ნამდვილი რიცხვის მთელ ნაწილს.

ამ უტოლობის გამოყენებით [42]-ში ნაპოვნი იქნა აუცილებელი და საკმარისი პირობები $f \in H_p(G)$ მარტინგალის უწყვეტობის მოდულებისთვის, რომელთათვისაც ფურიე-უოლშის მწკრივის კერძო ჯამები კრებადია $H_p(G)$ ნორმით.

თეორემა T8. ვთქვათ $0 < p \leq 1$, $[p]$ აღნიშნავს p ნამდვილი რიცხვის მთელ ნაწილს, $f \in H_p(G)$ და

$$\omega_{H_p(G)}\left(\frac{1}{2^N}, f\right) = o\left(\frac{1}{2^{N(1/p-1)} N^{[p]}}\right), \text{ როცა } N \to \infty.$$

მაშინ

$$\|S_n f - f\|_p \to 0, \text{ როცა } n \to \infty.$$

უფრო მეტიც, არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$, სადაც $0 < p < 1$, რომლისთვისაც

$$\omega_{H_p(G)}\left(\frac{1}{2^N}, f\right) = O\left(\frac{1}{2^{N(1/p-1)} N^{[p]}}\right), \text{ როცა } N \to \infty$$

და

$$\|S_n f - f\|_{weak-L_p(G)} \nrightarrow 0, \text{ როცა } n \to \infty.$$

ყოველივე ამის გათვალისწინებით, საინტერესოა უწყვეტობის მოდულის ტერმინებში ნაპოვნი იქნას ისეთი აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ფურიე-უოლშის მწკრივის კერძო ჯამების ქვემიმდევრობების კრებადობას $H_p(G)$ ნორმით.

სადისერტაციო ნაშრომის მეორე თავში (იხ. აგრეთვე [45]) ამომწურავი პასუხია გაცემული ამ კითხვებზე. (1.4) და (1.6) უტოლობების გამოყენებით მიღებული იქნება შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2.4.1. ვთქვათ $2^k < n \leq 2^{k+1}$. მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\|S_n f - f\|_{H_p(G)} \leq c_p 2^{d(n)(1/p-1)} \omega_{H_p(G)}\left(\frac{1}{2^k}, f\right), \quad (0 < p < 1) \tag{1.8}$$

და

$$\|S_n f - f\|_{H_1(G)} \leq c_1 V(n) \, \omega_{H_1(G)}\left(\frac{1}{2^k}, f\right) \tag{1.9}$$

უტოლობა (1.8)-ის გამოყენებით სადისერტაციო ნაშრომის მეორე თავში დამტკიცებულია შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

თეორემა 2.4.2. ვთქვათ $0<p<1$, $f\in H_p(G)$ და $\{m_k:k\geq 0\}$ არის არაუარყოფითი რიცხვების მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\omega_{H_p(G)}\left(\frac{1}{2^{|m_k|}},f\right)=o\left(\frac{1}{2^{d(m_k)(1/p-1)}}\right) \text{ როცა } k\to\infty.$$

მაშინ

$$\|S_{m_k}f-f\|_{H_p(G)}\to 0 \text{ როცა } k\to\infty. \tag{1.10}$$

მეორე მხრივ, თუ $\{m_k:k\geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (1.5) პირობას, მაშინ არსებობს მარტინგალი $f\in H_p(G)$ და ქვემიმდევრობა $\{\alpha_k:k\geq 0\}\subset\{m_k:k\geq 0\}$, რომლისთვისაც

$$\omega_{H_p(G)}\left(\frac{1}{2^{|\alpha_k|}},f\right)=O\left(\frac{1}{2^{d(\alpha_k)(1/p-1)}}\right) \text{ როცა } k\to\infty$$

და

$$\limsup_{k\to\infty}\|S_{\alpha_k}f-f\|_{weak-L_p(G)}>c_p>0 \text{ როცა } k\to\infty, \tag{1.11}$$

სადაც c_p არის მუდმივი, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე.

ამ უკანასკნელი თეორემიდან ადვილად მიიღება შემდეგი შედეგის სამართლიანობა:

შედეგი 2.4.1. ვთქვათ $0<p<1$, $f\in H_p(G)$ და $\{m_k:k\geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\omega_{H_p(G)}\left(\frac{1}{2^{|m_k|}},f\right)=o\left(\frac{1}{\left(m_k\mu\left(\text{supp}D_{m_k}\right)\right)^{1/p-1}}\right), \text{ როცა } k\to\infty,$$

მაშინ შესრულებულია (1.10).

მეორე მხრივ, თუ $\{m_k:k\geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\left(m_k\mu\left\{\text{supp}\left(D_{m_k}\right)\right\}\right)^{1/p-1}}{\Phi\left(m_k\right)}=\infty,$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f\in H_p(G)$ და ქვემიმდევრობა $\{\alpha_k:k\geq 0\}\subset\{m_k:k\geq 0\}$, ისეთი, რომ

$$\omega_{H_p(G)}\left(\frac{1}{2^{|\alpha_k|}},f\right)=O\left(\frac{1}{\left(\alpha_k\mu\left(\text{supp}D_{\alpha_k}\right)\right)^{1/p-1}}\right), \text{ როცა } k\to\infty$$

და შესრულებულია (1.11).

უტოლობა (1.9)-ის გამოყენებით სადისერტაციო ნაშრომის მეორე თავში ასევე დამტკიცებულია შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

თეორემა 2.4.2. ვთქვათ $f\in H_1(G)$ და $\{m_k:k\geq 0\}$ არის დადებითი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, ისეთი რომ

$$\omega_{H_1(G)}\left(\frac{1}{2^{|m_k|}},f\right)=o\left(\frac{1}{V\left(m_k\right)}\right) \text{ როცა } k\to\infty.$$

მაშინ

$$\|S_{m_k}f-f\|_{H_1(G)}\to 0 \text{ როცა } k\to\infty.$$

უფრო მეტიც, თუ $\{m_k : k \geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (1.5) პირობას, მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_1(G)$ და ქვემიმდევრობა $\{\alpha_k : k \geq 0\} \subset \{m_k : k \geq 0\}$ რომლისთვისაც

$$\omega_{H_1(G)}\left(\frac{1}{2^{|\alpha_k|}}, f\right) = O\left(\frac{1}{V(\alpha_k)}\right) \text{ როცა } k \to \infty$$

და

$$\limsup_{k\to\infty} \|S_{\alpha_k} f - f\|_1 > c > 0 \text{ როცა } k \to \infty,$$

სადაც c არის აბსოლუტური მუდმივი.

თეორემა 2.4.2-ის და თეორემა 2.4.3-ის გამოყენებით მარტივად მიიღება თეორემა T8-ის სამართლიანობა.

ვეისმა [52]-ში განიხილა ფურიე-უოლშის მწკრივის ფეიერის საშუალოების ნორმით კრებადობის საკითხები და დაამტკიცა შემდეგი:

თეორემა We1. ვთქვათ $p > 1/2$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c_p, ისეთი, რომ

$$\|\sigma_k f\|_{H_p(G)} \leq c_p \|f\|_{H_p(G)}.$$

ვეისმა ასევე დაამტკიცა, (დეტალებისთვის იხ. წიგნები [51]) ფურიე-უოლშის მწკრივის ფეიერის საშუალოების σ_{2^n} ქვემიმდევრობის შემოსაზღვრულობის საკითხი $H_p(G)$-დან $H_p(G)$-ში, როცა $p > 0$:

თეორემა We2. ვთქვათ $p > 0$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ

$$\|\sigma_{2^k} f - f\|_{H_p(G)} \to 0, \text{როცა } k \to \infty. \tag{1.12}$$

მეორე მხრივ [38]-ში დამტკიცებულია შემდეგი უარყოფითი შედეგი:

თეორემა T9. არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$ $(0 < p \leq 1/2)$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sigma_{2^n+1} f\|_{H_p(G)} = \infty.$$

გოგინავამ [18] (იხ. აგრეთვე [27]) დაამტკიცა შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

თეორემა Gog1. ვთქვათ $0 < p \leq 1$. მაშინ ოპერატორი $|\sigma_{2^n} f|$ არ არის შემოსაზღვრული $H_p(G)$-დან $H_p(G)$-ში.

როცა $0 < p < 1/2$ მაშინ [28]-ში დადგენილი იქნა ფურიე-უოლშის სისტემის ფეიერის საშუალოების ქვემიმდევრობების შემოსაზღვრულობის საკითხი $H_p(G)$-დან $H_p(G)$-ში. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა T10. ვთქვათ $0 < p < 1/2$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\|\sigma_{m_k} f\|_{H_p(G)} \leq c_p \|f\|_{H_p(G)},$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა დაკმაყოფილებულია (1.3) პირობა.

თეორემა T10-დან დაუყოვნებლივ მივიღებთ ვეისის თეორემა We2-ს და ახალ საინტერესო შედეგებსაც:

თეორემა T11. ვთქვათ $p > 0$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\|\sigma_{2^n} f\|_{H_p(G)} \leq c_p \|f\|_{H_p(G)}$$

და

$$\|\sigma_{2^n+2^{n-1}} f\|_{H_p(G)} \leq c_p \|f\|_{H_p(G)}.$$

მეორე მხრივ, გვაქვს შემდეგი უარყოფითი შედეგი:

თეორემა T12. ვთქვათ $p > 0$. მაშინ არსებოს მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sigma_{2^n+1} f\|_{H_p(G)} = \infty.$$

ყოველივე ამის გათვალისწინებით, საინტერესოა დადგენილ იქნას ფურიე-უოლშის მწკრივის ფეიერის საშუალოების $\sigma_{n_k} f$ ქვემიმდევრობების განშლადობის რიგი $H_p(G)$ სივრცეებზე.

სადოქტორო დისერტაციის მესამე თავში შესწავლილია სწორედ ფურიე-უოლშის მწკრივის ფეიერის საშუალოების ქვემიმდევრობების (იხ. აგრეთვე [46]-ში) განშლადობის ზუსტი რიგი ჰარდის მარტინგალურ $H_p(G)$ სივრცეებზე, როცა $0 < p \leq 1/2$.

პირველ რიგში განხილული იქნება $p = 1/2$ შემთხვევა:

თეორემა 3.3.1. ვთქვათ $n \in \mathbb{N}_+$ და $f \in H_{1/2}(G)$. მაშინ არსებობს მუდმივი c, ისეთი, რომ

$$\|\sigma_n f\|_{H_{1/2}(G)} \leq cV^2(n) \|f\|_{H_{1/2}(G)}. \tag{1.13}$$

უფრო მეტიც, თუ $\{m_k : k \geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} V(m_k) = \infty$$

და $\Phi : \mathbb{N}_+ \to [1, \infty)$ არის არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{V^2(m_k)}{\Phi(m_k)} = \infty.$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_{1/2}(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \frac{\sigma_{m_k} f}{\Phi(m_k)} \right\|_{1/2} = \infty.$$

ასევე განხილული იქნა $0 < p < 1/2$ შემთხვევა და ნაჩვენები იქნა შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

თეორემა 3.3.2. ვთქვათ $0 < p < 1/2$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\|\sigma_n f\|_{H_p(G)} \leq c_p 2^{d(n)(1/p-2)} \|f\|_{H_p(G)}. \tag{1.14}$$

მეორე მხრივ, თუ $0 < p < 1/2$, $\{m_k : k \geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, ისეთი, რომ აკმაყოფილებს (1.5) პირობას და $\Phi : \mathbb{N}_+ \to [1, \infty)$ არის არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{2^{d(m_k)(1/p-2)}}{\Phi(m_k)} = \infty,$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \frac{\sigma_{m_k} f}{\Phi(m_k)} \right\|_{weak-L_p(G)} = \infty.$$

მოცემული შედეგებიდან ასევე მარტივად მიიღება თეორემა We2-ის სამართლიანობა.

1975 წელს შიპმა [29] დაამტკიცა, რომ ფეიერის საშუალოების σ^* მაქსიმალურ ოპერატორს აქვს სუსტი-(1,1) ტიპი:

$$\mu\left(\sigma^* f > \lambda\right) \leq \frac{c}{\lambda}\left\|f\right\|_1, \qquad (\lambda > 0),$$

საიდანაც მარცინკევიჩის საინტერპოლაციო თეორემით დავადგენთ რომ σ^*-ს აქვს ძლიერი (p,p) ტიპი, როცა p>1:

$$\left\|\sigma^* f\right\|_p \leq c\left\|f\right\|_p, \qquad (p > 1).$$

შემოსაზღვრულობას არ აქვს ადგილი, როცა p=1, მაგრამ ფუჯიმ [7] დაამტკიცა, რომ ფეიერის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია $H_1(G)$-დან $L_1(G)$-ში. ფუჯის თეორემა განაზოგადა ვეისმა [53]. მან დაამტკიცა, რომ ფეიერის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია $H_p(G)$-დან $L_p(G)$-ში, როცა p>1/2. შიმონმა [31] ააგო მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს, რომ შემოსაზღვრულობას არ აქვს ადგილი, როცა $0 < p < 1/2$. გოგინავამ [12] (იხ. აგრეთვე ბლაჰოტა, გატი და გოგინავა [3] და [4]) განაზოგადა ეს შედეგი $0 < p \leq 1/2$-თვის და დაამტკიცა შემდეგი:

თეორემა Gog2. არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$ $(0 < p \leq 1/2)$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\sigma_n f\right\|_p = \infty.$$

ვეისმა [54] (იხ. აგრეთვე გოგინავა [14]) აჩვენა შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

თეორემა We3. ვთქვათ $f \in H_{1/2}(G)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c, ისეთი, რომ

$$\left\|\sigma^* f\right\|_{weak-L_{1/2}(G)} \leq c\left\|f\right\|_{H_{1/2}(G)}.$$

როცა $0 < p < 1/2$ მაშინ [28]-ში დადგენილ იქნა ფურიე-უოლშის სისტემის ფეიერის საშუალოების ქვემიმდევრობების შესაბამისი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის საკითხი $H_p(G)$-დან $L_p(G)$-ში. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა T13. ვთქვათ $0 < p < 1/2$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{\sigma}^* f := \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sigma_{m_k} f\right|$$

შემოსაზღვრულია $H_p(G)$-დან $L_p(G)$-ში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა დაკმაყოფილებულია (1.3) პირობა.

კერძოდ, აქედან მიიღება შემდეგი თეორემების სამართლიანობა:

თეორემა T14. ვთქვათ $p > 0$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sigma_{2^n} f\right|\right\|_p \leq c_p\left\|f\right\|_{H_p(G)} \tag{1.15}$$

და

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sigma_{2^n+2^{n-1}} f\right|\right\|_p \leq c_p\left\|f\right\|_{H_p(G)}.$$

მეორე მხრივ, გვაქვს შემდეგი უარყოფითი შედეგი:

თეორემა T15. ვთქვათ $p > 0$. მაშინ არსებოს მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{N}} |\sigma_{2^n+1} f| \right\|_p = \infty.$$

ზემოთ, მოცემული პირობა არის საკმარისი $p = 1/2$ -თვისაც, მაგრამ არსებობს ისეთი ქვემიმდევრობები, რომლებიც არ აკმაყოფილებენ (1.3) პირობას, თუმცა ფურიე-უოლშის მწკრივის ფეიერის საშუალოების ქვემიმდევრობების შესაბამისი მაქსიმალური ოპერატორები არიან შემოსაზღვრულები $H_{1/2}(G)$ -დან $L_{1/2}(G)$ -ში.

თუმცა დღემდე უცნობია ისეთი აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომლებიც დაახასიათებენ ფეიერის საშუალოების ქვემიმდევრობების შესაბამისი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობას $H_{1/2}(G)$-დან $L_{1/2}(G)$-ში.

[13]-ში და [38]-ში (იხ. აგრეთვე [40], [20] და [37]) დამტკიცებულია შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

თეორემა GT1. ვთქვათ $0 < p \leq 1/2$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{\sigma}_p^* f := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\sigma_n f|}{(n+1)^{1/p-2} \log^{2[1/2+p]}(n+1)}$$

შემოსაზღვრულია $H_p(G)$-დან $L_p(G)$-ში.

უფრო მეტიც, ნებისმიერი არაკლებადი $\varphi : \mathbb{N}_+ \to [1, \infty)$ ფუნქციისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{(n+1)^{1/p-2} \log^{2[1/2+p]}(n+1)}{\varphi(n)} = +\infty,$$

არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$, $(0 < p < 1/2)$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \frac{\sigma_n f}{\varphi(n)} \right\|_p = \infty,$$

ფურიე-უოლშის მწკრივის ფეიერის საშუალოების წონიანი მაქსიმალური ოპერატორების შესახებ ზემოთ მოყვანილი უარყოფითი შედეგიდან მიიღება, რომ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$ $(0 < p \leq 1/2)$, ისეთი რომ

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\sigma_n f\|_p = \infty.$$

ხოლო წონიანი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობიდან მივიღებთ, რომ ნებისმიერი $f \in H_p(G)$-თვის არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c_p, ისეთი, რომ სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$\|\sigma_n f\|_p \leq c_p n^{1/p-2} \log^{2[1/2+p]}(n+1) \|f\|_{H_p(G)}, \quad \text{როცა} \quad 0 < p \leq 1/2. \tag{1.16}$$

(1.16) უტოლობის გამოყენებით [42]-ში დადგენილია აუცილებელი და საკმარისი პირობები $f \in H_p(G)$ მარტინგალის უწყვეტობის მოდულებისთვის, რომელთათვისაც ფურიე-უოლშის მწკრივის ფეიერის საშუალოები კრებადია $H_p(G)$ ნორმით.

თეორემა T16. ვთქვათ $0 < p \leq 1/2$, $f \in H_p(G)$ და

$$\omega_{H_p(G)}\left(\frac{1}{2^N}, f\right) = o\left(\frac{1}{2^{N(1/p-2)} N^{2[1/2+p]}}\right), \text{ როცა } N \to \infty.$$

მაშინ

$$\|\sigma_n f - f\|_p \to 0, \text{ როცა } n \to \infty.$$

უფრო მეტიც, არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$, რომლისთვისაც

$$\omega_{H_{1/2}(G)}\left(\frac{1}{2^N}, f\right) = O\left(\frac{1}{2^{N(1/p-2)}N^{2[1/2+p]}}\right), \text{ როცა } N \to \infty$$

და

$$\|\sigma_n f - f\|_p \nrightarrow 0, \text{ როცა } n \to \infty.$$

ყოველივე ამის გათვალისწინებით, საინტერესოა უწყვეტობის მოდულის ტერმინებში დადგენილ იქნას აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომელიც უზრუნველყოფს ფურიე-უოლშის მწკრივის ფეიერის $\sigma_{n_k} f$ საშუალოების ქვემიმდევრობების კრებადობას $H_p(G)$ ნორმით.

სადისერტაციო ნაშრომის მესამე თავში ნაპოვნია სწორედ ასეთი აუცილებელია და საკმარისი პირობები, რომელიც უზრუნველყოფენ ფურიე-უოლშის მწკრივის ფეიერის საშუალოების $\sigma_{n_k} f$ ქვემიმდევრობების კრებადობას $H_p(G)$ ნორმით (იხ. აგრეთვე[46]).

უტოლობა (1.13)-ის გამოყენებით $p = 1/2$-თვის მიღებული იქნა შემდეგი აუცილებელი და საკმარისი პირობები:

თეორემა 3.4.1. ვთქვათ $f \in H_{1/2}(G)$ და $\{m_k : k \geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, ისეთი რომ

$$\omega_{H_{1/2}(G)}\left(\frac{1}{2^{|m_k|}}, f\right) = o\left(\frac{1}{V^2(m_k)}\right) \text{ როცა } k \to \infty.$$

მაშინ

$$\|\sigma_{m_k} f - f\|_{H_{1/2}(G)} \to 0 \text{ როცა } k \to \infty.$$

უფრო მეტიც, თუ $\{m_k : k \geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (1.5) პირობას, მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_{1/2}(G)$ და ქვემიმდევრობა $\{\alpha_k : k \geq 0\} \subset \{m_k : k \geq 0\}$ რომლისთვისაც

$$\omega_{H_{1/2}(G)}\left(\frac{1}{2^{|\alpha_k|}}, f\right) = O\left(\frac{1}{V^2(\alpha_k)}\right) \text{ როცა } k \to \infty$$

და

$$\limsup_{k\to\infty} \|\sigma_{\alpha_k} f - f\|_{1/2} > c > 0 \text{ როცა } k \to \infty,$$

სადაც c არის აბსოლუტური მუდმივი.

უტოლობა (1.14)-ის გამოყენებით სადისერტაციო ნაშრომის მესამე თავში ასევე განხილული იქნება $0 < p < 1/2$ შემთხვევა და ნაჩვენები იქნება შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

თეორემა 3.4.2. ვთქვათ $0 < p < 1/2$, $f \in H_p(G)$ და $\{m_k : k \geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\omega_{H_p(G)}\left(\frac{1}{2^{|m_k|}}, f\right) = o\left(\frac{1}{2^{d(m_k)(1/p-2)}}\right) \text{ როცა } k \to \infty.$$

მაშინ

$$\|\sigma_{m_k} f - f\|_{H_p(G)} \to 0 \text{ როცა } k \to \infty.$$

მეორე მხრივ, თუ $\{m_k : k \geq 0\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (1.5) პირობას, მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$ და ქვემიმდევრობა $\{\alpha_k : k \geq 0\} \subset \{m_k : k \geq 0\}$, რომლისთვისაც

$$\omega_{H_p(G)}\left(\frac{1}{2^{|\alpha_k|}}, f\right) = O\left(\frac{1}{2^{d(\alpha_k)(1/p-2)}}\right) \text{ როცა } k \to \infty$$

და

$$\limsup_{k\to\infty} \|\sigma_{\alpha_k} f - f\|_{weak-L_p(G)} > c_p > 0 \text{ როცა } k \to \infty,$$

სადაც c_p არის მუდმივი, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე.

შიმონმა [34]-ში და [32]-ში (იხ. აგრეთვე [35]) განიხილა ფურიე-უოლშის მწკრივის კერძო ჯამების ძლიერად შეჯამებადობის საკითხები და მიუხედავად თეორემა S1-ის სამართლიანობისა, დაამტკიცა შემდეგი:

თეორემა Si1. ვთქვათ $0 < p \leq 1$ და $f \in H_1(G)$. მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\frac{1}{\log^{[p]} n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|S_k f\|_{H_p(G)}}{k^{2-p}} \leq c\,\|f\|_{H_p(G)},$$

ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ ანალოგიური შედეგი დამტკიცებულია შმიტის [36] მიერ, ვილინკინის სისტემების მიმართ კი გატის [9] მიერ.

[39]-ში ნაჩვენები იქნა შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

თეორემა T17. ნებისმიერი 0<p<1-თვის და ნებისმიერი არაკლებადი $\varphi : \mathbb{N}_+ \to [1, \infty)$ ფუნქციისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^{2-p}}{\varphi(n)} = +\infty,$$

არსებობს მარინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|S_k f\|_{weak-L_p(G)}^p}{\varphi(k)} = \infty, \qquad (0 < p < 1).$$

თეორემა Si1-დან ნებისმიერი $f \in H_1(G)$-თვის ადვილად მიიღება შემდეგი ზღვარითი ტოლობები:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|S_k f - f\|_1}{k} = 0$$

და

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|S_k f\|_1}{k} = \|f\|_{H_1(G)}.$$

როცა $0 < p < 1$ და $f \in H_p(G)$, მაშინ თეორემა Si1-დან მივიღებთ, რომ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\frac{1}{n^{1/2-p/2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|S_k f\|_{H_p(G)}^p}{k^{3/2-p/2}} \leq c_p\,\|f\|_{H_p(G)}^p,$$

უფრო მეტიც,

$$\frac{1}{n^{1/2-p/2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|S_k f - f\|_{H_p(G)}^p}{k^{3/2-p}} = 0,$$

საიდანაც მიიღება შემდეგი ზღვარით ტოლობის სამართლიანობა

$$\frac{1}{n^{1/2-p/2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|S_kf\|_{H_p(G)}^p}{k^{3/2-p/2}}=\|f\|_{H_p(G)}^p\,.$$

სადოქტორო დისერტაციის მესამე თავში განხილულ იქნა უოლშ-ფეიერის საშუალოების ძლიერად შეჯამებადობის საკითხები. თეორემა We1-ის და თეორემა Gog2-ის გათვალისწინებით საინტერესოა მხოლოდ $0<p\leq 1/2$ შემთხვევა:

თეორემა 3.5.1. ვთქვათ $0<p\leq 1/2$ და $f\in H_p(G)$. მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]}n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\|\sigma_mf\|_{H_p(G)}^p}{m^{2-2p}}\leq c_p\,\|f\|_{H_p(G)}^p\,.$$

ვთქვათ $0<p<1/2$ და $\Phi:\mathbb{N}_+\to[1,\,\infty)$ არის არაკლებადი, არაუარყოფითი ფუნქცია, ისეთი, რომ $\Phi\left(n\right)\uparrow\infty$ და

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k^{2-2p}}{\Phi\left(k\right)}=\infty.$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f\in H_p(G)$, ისეთი, რომ

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\|\sigma_mf\|_{weak-L_p(G)}^p}{\Phi\left(m\right)}=\infty.$$

როცა $p=1/2$ ასევე დამტკიცებული იქნა შემდეგი:

თეორემა 3.5.2. ვთქვათ $f\in H_{1/2}(G)$. მაშინ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_+}\sup_{\|f\|_{H_p(G)}\leq 1}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\|\sigma_mf\|_{1/2}^{1/2}=\infty.$$

თეორემა 3.5.1-დან ნებისმიერი $f\in H_{1/2}(G)$-თვის ადვილად მიიღება შემდეგი ზღვარითი ტოლობები:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_kf-f\|_{H_{1/2}(G)}^{1/2}}{k}=0$$

და

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_kf\|_{H_{1/2}(G)}^{1/2}}{k}=\|f\|_{H_{1/2}(G)}^{1/2}\,.$$

როცა $0<p<1/2$ და $f\in H_p(G)$, მაშინ თეორემა 3.5.1-დან მივიღებთ, რომ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\frac{1}{n^{1/2-p}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_kf\|_{H_p(G)}^p}{k^{3/2-p}}\leq c_p\,\|f\|_{H_p(G)}^p\,,$$

უფრო მეტიც,

$$\frac{1}{n^{1/2-p}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_kf-f\|_{H_p(G)}^p}{k^{3/2-p}}=0,$$

საიდანაც მიიღება შემდეგი ზღვარითი ტოლობის სამართლიანობა:

$$\frac{1}{n^{1/2-p}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k f\|_{H_p(G)}^p}{k^{3/2-p}}=\|f\|_{H_p(G)}^p.$$

ორგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის სისტემისთვის (დეტალებისთვის იხ. წიგნები [30] და [51]) სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა S3. ვთქვათ $p>0$ და $f\in H_p(G^2)$. მაშინ

$$\|S_{2^n,2^n}f-f\|_p\to 0,\quad n\to\infty. \tag{1.17}$$

ასევე სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თეორემა S4. ვთქვათ $p>0$ და $f\in H_p(G^2)$. მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}|S_{2^n,2^n}f|\right\|_p\le c_p\|f\|_{H_p(G^2)}, \tag{1.18}$$

თეორემა S4-ის დახმარებით შესაძლებელია თეორემა S3-ის განზოგადება (დეტალებისთვის იხ. წიგნები [30] და [51]):

თეორემა S5. ვთქვათ $p>0$ და $f\in H_p(G^2)$. მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\|S_{2^n,2^n}f\|_{H_p(G^2)}\le c_p\|f\|_{H_p(G^2)}. \tag{1.19}$$

მეორე მხრივ, (იხ. [43]) სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა T18. არსებობს მარტინგალი $f\in H_p(G^2)$ $(0<p\le 1)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|S_{n,n}f\|_p=\infty.$$

მიუხედავად თეორემა T18-ის სამართლიანობისა, ორგანზომილებიანი ფურიე- უოლშის მწკრივებისათვის ვეისმა [50] დაამტკიცა შემდეგი:

თეორემა We4. ვთქვათ $\alpha\ge 0$ და $f\in H_p(G^2)$, მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\sup_{n,m\ge 2}\left(\frac{1}{\log n\log m}\right)^{[p]}\sum_{2^{-\alpha}\le k/l\le 2^{\alpha},\,(k,l)\le(n,m)}\frac{\|S_{k,l}f\|_p^p}{(kl)^{2-p}}\le c_p\|f\|_{H_p(G^2)}^p,$$

სადაც $0<p\le 1$ და $[p]$ აღნიშნავს p ნამდვილი რიცხვის მთელ ნაწილს.

გოგინავამ და გოგოლაძემ [19]-ში განაზოგადეს ეს შედეგი, იმ შემთხვევაში, როცა $\alpha=0$:

თეორემა GG1. ვთქვათ $f\in H_1(G^2)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c, ისეთი, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|S_{n,n}f\|_1}{n\log^2 n}\le c\|f\|_{H_1(G^2)}.$$

[47]-ში ნაჩვენები იქნა $\left\{n\log^2 n\right\}_{n=1}^{\infty}$ წონების რიგის არსებითობა. სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა T19. ვთქვათ $\Phi : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ არის არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\lim_{n\to\infty} \Phi(n) = +\infty$. მაშინ

$$\sup_{\|f\|_{H_1(G^2)}\leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|S_{n,n}f\|_1 \Phi(n)}{n\log^2(n+1)} = \infty.$$

თეორემა GG1-დან ადვილად მიიღება, რომ თუ $f \in H_1(G^2)$, მაშინ

$$\frac{1}{\log^{1/2} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|S_{k,k}f\|_{H_1(G^2)}}{k\log^{3/2} k} \leq c \|f\|_{H_1(G^2)},$$

უფრო მეტიც,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log^{1/2} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|S_{k,k}f - f\|_{H_1(G^2)}^{2/3}}{k\log^{3/2} k} = 0$$

საიდანაც მიიღება შემდეგი ზღვარითი ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log^{1/2} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|S_{k,k}f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3}}{k\log^{3/2} k} = \|f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3}.$$

სადოქტორო ნაშრომის (იხ. აგრეთვე [48]) მეოთხე თავში განხილული იქნება ორ-განზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების ძლიერად შეჯამებადობის საკითხები, როცა $0 < p < 1$:

თეორემა 4.3.1 ვთქვათ $0 < p < 1$ და $f \in H_p(G^2)$. მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|S_{n,n}f\|_p^p}{n^{3-2p}} \leq c_p \|f\|_{H_p(G^2)}^p. \tag{1.20}$$

უფრო მეტიც, თუ $0 < p < 1$ და $\Phi : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ არის არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს $\lim_{n\to\infty} \Phi(n) = +\infty$ პირობას, მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G^2)$ ისეთი, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|S_{n,n}f\|_{weak-L_p(G^2)}^p \Phi(n)}{n^{3-2p}} = \infty.$$

თეორემა 4.3.1-დან ადვილად მიიღება, რომ როცა $0 < p < 1$ და $f \in H_p(G^2)$, მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\frac{1}{n^{1/2-p}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|S_{k,k}f\|_{H_p(G^2)}^p}{k^{3/2-p}} \leq c_p \|f\|_{H_p(G^2)}^p,$$

უფრო მეტიც,

$$\frac{1}{n^{1/2-p}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|S_{k,k}f - f\|_{H_p(G^2)}^p}{k^{3/2-p}} = 0,$$

საიდანაც მიიღება შემდეგი ზღვარითი ტოლობა

$$\frac{1}{n^{1/2-p}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|S_{k,k}f\|_{H_p(G)}^p}{k^{3/2-p}} = \|f\|_{H_p(G)}^p.$$

ვეისმა (დეტალებისთვის იხ. წიგნი [51]) განიხილა ფურიე-უოლშის მწკრივის მარცინკევიჩის საშუალოები და დაამტკიცა შემდეგი:

თეორემა We5. ვთქვათ $p > 2/3$ და $f \in H_p(G^2)$. მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\|\mathcal{M}_n f - f\|_{H_p(G^2)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

გოგინავამ [17] დაამტკიცა, რომ სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა Gog2. ვთქვათ $0 < p \leq 2/3$. მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G^2)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathcal{M}_n f\|_{H_p(G^2)} = \infty.$$

გოგინავამ [15]-ში ასევე განიხილა ფურიე-უოლშის მწკრივის მარცინკევიჩის საშუალოების $\mathcal{M}_{2^n}$ ქვემიმდევრობა და დაამტკიცა შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

თეორემა Gog3. ვთქვათ $p > 1/2$ და $f \in H_p(G^2)$. მაშინ

$$\|\mathcal{M}_{2^k} f - f\|_{H_p(G^2)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1.21}$$

უფრო მეტიც, არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G^2)$, $(0 < p \leq 1/2)$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathcal{M}_{2^n} f\|_{H_p(G^2)} = \infty.$$

[25]-ში განხილულ იქნა ორგანზომილებიანი მარცინკევიჩის საშუალოების ძლიერად შეჯამებადობის თეორემები, როცა $0 < p < 2/3$:

თეორემა NT1. ვთქვათ $0 < p < 2/3$ და $f \in H_p(G^2)$. მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\|\mathcal{M}_m f\|_{H_p(G^2)}^p}{m^{3-3p}} \leq c_p \|f\|_{H_p(G^2)}^p .$$

უფრო მეტიც, თუ $0 < p < 2/3$ და $\Phi : \mathbb{N}_+ \to [1, \infty)$ არის არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს $\Phi(n) \uparrow \infty$ და

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k^{3-3p}}{\Phi(k)} = \infty,$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G^2)$, ისეთი, რომ

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\|\mathcal{M}_m f\|_{weak-L_p(G^2)}^p}{\Phi(m)} = \infty.$$

თეორემა NT1-დან მიიღება, რომ როცა $0 < p < 2/3$ და $f \in H_p(G^2)$, მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ

$$\frac{1}{n^{1-3p/2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|\mathcal{M}_k f\|_{H_p(G^2)}^p}{k^{2-3p/2}} \leq c_p \|f\|_{H_p(G^2)}^p ,$$

უფრო მეტიც,

$$\frac{1}{n^{1-3p/2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|\mathcal{M}_k f - f\|_{H_p(G^2)}^p}{k^{2-3p/2}} = 0,$$

საიდანაც მიიღება შემდეგი ზღვარითი ტოლობა

$$\frac{1}{n^{1-3p/2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\mathcal{M}_k f\|_{H_p(G)}^p}{k^{2-3p/2}}=\|f\|_{H_p(G)}^p .$$

სადოქტორო ნაშრომის მეოთხე თავში ნაჩვენები იქნება (იხ. [23]) ორგანზომილებიანი მარცინკევიჩის საშუალოების ძლიერად შეჯამებადობის თეორემები, როცა $p=2/3$:

თეორემა 4.4.1 ვთქვათ $f\in H_{2/3}(G^2)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c, ისეთი, რომ

$$\frac{1}{\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\|\mathcal{M}_m f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3}}{m}\leq c\,\|f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} .$$

ამ შედეგებიდან ადვილად მიიღება, რომ თუ $f\in H_{2/3}(G^2)$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\mathcal{M}_k f-f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3}}{k}=0$$

და

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\mathcal{M}_k f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3}}{k}=\|f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} .$$

ორგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივებისათვის ვეისმა [56] დაამტკიცა, რომ სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა We6. ვთქვათ $p>2/3$ და $f\in H_p\left(G^2\right)$. მაშინ მარცინკევიჩის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი $\mathcal{M}^*f$ შემოსაზღვრულია $H_p\left(G^2\right)$-დან $L_p\left(G^2\right)$-ში:

$$\|\mathcal{M}^*f\|_p\leq c_p\,\|f\|_{H_p(G^2)} ,$$

სადაც c_p არის მუდმივი, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე.

გოგინავამ [16] ასევე აჩვენა, რომ სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა Gog4. ვთქვათ $f\in H_{2/3}\left(G^2\right)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c, ისეთი, რომ

$$\|\mathcal{M}^*f\|_{weak-L_{2/3}(G^2)}\leq c\,\|f\|_{H_{2/3}} .$$

უფრო მეტიც, არსებობს მარტინგალი $f\in H_p(G^2),\ \ (0<p\leq 2/3)$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\mathcal{M}_n f\|_p=\infty.$$

გოგინავამ [17] ასევე განიხილა ფურიე-უოლშის მწკრივის მარცინკევიჩის საშუალოების შეზღუდული მაქსიმალური ოპერატორი $\sup_{n\in\mathbb{N}}|\mathcal{M}_{2^n}|$ და აჩვენა შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

თეორემა Gog5. ვთქვათ $p>1/2$ და $f\in H_p(G^2)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c_p, ისეთი, რომ

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}|\mathcal{M}_{2^n}f|\right\|_p\leq c_p\,\|f\|_{H_p(G^2)} . \tag{1.22}$$

უფრო მეტიც, არსებობს მარტინგალი $f\in H_p(G^2),\ \ (0<p\leq 1/2)$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\mathcal{M}_{2^n}f\|_p=\infty.$$

[22]-ში და [25]-ში განხილული იქნა წონიანი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის საკითხი, როცა $0 < p \leq 2/3$:

თეორემა NT2. ვთქვათ $0 < p \leq 2/3$. მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{\mathcal{M}}^* := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\mathcal{M}_n|}{(n+1)^{2/p-3} \log^{3[1/3+p]/2}(n+1)}$$

შემოსაზღვრულია $H_p(G^2)$-დან $L_p(G^2)$-ში.

უფრო მეტიც, თუ $\varphi : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ არის არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^{2/p-3} \log^{3[1/3+p]/2}(n)}{\varphi(n)} = +\infty,$$

მაშინ

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \frac{\mathcal{M}_n f}{\varphi(n)} \right\|_p = \infty.$$

თეორემა NT2-დან მივიღებთ, რომ ნებისმიერი $0 < p \leq 1/2$-თვის და $f \in H_p(G^2)$-თვის არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c_p, ისეთი, რომ სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$\|\mathcal{M}_n f\|_p \leq c_p (n+1)^{2/p-3} \log^{3[1/3+p]/2}(n+1) \|f\|_{H_p(G^2)}. \tag{1.23}$$

(1.23) უტოლობის გამოყენებით [25]-ში დავადგენილ იქნა აუცილებელი და საკმარისი პირობები $f \in H_p(G^2)$ მარტინგალის უწყვეტობის მოდულებისთვის, რომელთათვისაც ორგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივის მარცინკევიჩის საშუალოები კრებადია $H_p(G^2)$ ნორმით.

თეორემა NT3. ვთქვათ $1/2 < p < 2/3$, $f \in H_p(G^2)$ და

$$\omega_{H_p(G^2)}\left(\frac{1}{2^k}, f\right) = o\left(\frac{1}{2^{k(2/p-3)}}\right), \text{ როცა } k \to \infty.$$

მაშინ

$$\|\mathcal{M}_n f - f\|_{H_p(G^2)} \to 0, \text{ როცა } n \to \infty.$$

უფრო მეტიც, თუ $0 < p < 2/3$, მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G^2)$, ისეთი, რომ

$$\omega_{H_p(G^2)}\left(\frac{1}{2^k}, f\right) = O\left(\frac{1}{2^{k(2/p-3)}}\right), \text{ როცა } k \to \infty$$

და

$$\|\mathcal{M}_n f - f\|_{weak-L_p(G^2)} \nrightarrow 0, \text{ როცა } n \to \infty.$$

კვლავ (1.23) უტოლობის გამოყენებით და [25]-ში განხილული მეთოდის გაუმჯობესებით სადოქტორო ნაშრომის მეოთხე თავში (იხ. აგრეთვე [24]) დამკიცებულია შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

თეორემა 4.5.1. ვთქვათ $f \in H_{2/3}(G^2)$ და

$$\omega_{H_{2/3}(G^2)}\left(\frac{1}{2^k}, f\right) = o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right), \text{ როცა } k \to \infty.$$

მაშინ

$$\|\mathcal{M}_n f - f\|_{H_{2/3}(G^2)} \to 0, \text{ როცა } n \to \infty.$$

მეორე მხრივ, არსებობს მარტინგალი $f \in H_{2/3}(G^2)$, ისეთი, რომ

$$\omega_{H_{2/3}(G^2)}\left(\frac{1}{2^k}, f\right) = O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right), \text{ როცა } k \to \infty$$

და

$$\|\mathcal{M}_n f - f\|_{2/3} \nrightarrow 0, \text{ როცა } n \to \infty.$$

ერთგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების კერძო ჯამები მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე

2.1 განმარტებები და აღნიშვნები

$\mathbb{N}_{+}$-ით ავღნიშნოთ მთელი დადებითი რიცხვების სიმრავლე, ხოლო $\mathbb{N} := \mathbb{N}_{+} \cup \{0\}$-ით მთელი არაუარყოფითი რიცხვების სიმრავლე. ავღნიშნოთ Z_2-ით დისკრეტული ორობითი ჯგუფი, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ორ ელემენტს $Z_2 := \{0, 1\}$, ჯგუფის ოპერაცია არის მოდულით 2 შეკრება და ყველა ქვესიმრავლე არის ღია. ჰაარის ზომა Z_2 არის განსაზღვრული ისე, რომ თითოეული ელემენტის ზომა არის 1/2.

ავღნიშნოთ G-თი ჯგუფი, რომელიც წარმოადგენს Z_2-ების თვლად პირდაპირ ნამრავლს, ხოლო ტოპოლოგია G-ზე არის თითოეულ Z_2-ზე არსებული დისკრეტული ტოპოლოგიების თვლადი პირდაპირი ნამრავლი.

G ჯგუფის ელემენტებს აქვთ შემდეგი სახე

$$x := (x_0, x_1, ..., x_j, ...) \qquad (x_k = 0, 1) .$$

ადვილი სანახავია, რომ G ჯგუფის, როგორც ტოპოლოგიური სივრცის ბაზისს წარმოადგენს შემდეგი ღია სიმრავლეები

$$I_0 (x) := G,$$

$$I_n(x) := \{y \in G \mid y_0 = x_0, ..., y_{n-1} = x_{n-1}\} \; (x \in G, \; n \in \mathbb{N}).$$

ავღნიშნოთ $I_n := I_n (0)$ ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$-თვის და $\overline{I_n} := G \setminus I_n$.

ცხადია, რომ

$$\overline{I_M} = \left(\bigcup_{k=0}^{M-2} \bigcup_{l=k+1}^{M-1} I_{l+1} (e_k + e_l) \right) \bigcup \left(\bigcup_{k=0}^{M-1} I_M (e_k) \right) = \bigcup_{k=0}^{M-1} I_k \backslash I_{k+1}. \tag{2.1}$$

თუ $n \in \mathbb{N}$, მაშინ ის შეიძლება ცალსახად წარმოდგეს, როგორც

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_j 2^j$$

სადაც $n_j \in Z_2 \quad (j \in \mathbb{N})$ და მხოლოდ n_j-ების სარული რაოდენობა განსხვავდება ნულისგან.

ავღნიშნოთ

$$\langle n \rangle := \min\{j \in \mathbb{N}, n_j \neq 0\} \quad \text{და} \quad |n| := \max\{j \in \mathbb{N}, n_j \neq 0\},$$

მაშინ ადვილი სანახავია, რომ $2^{|n|} \leq n \leq 2^{|n|+1}$.

ვთქვათ

$$d(n) := |n| - \langle n \rangle, \quad \text{ნებისმიერი} \quad n \in \mathbb{N} - \text{თვის}.$$

ავღნიშნოთ $n \in \mathbb{N}$-ის ვარიაცია $(n_k,\ k \in \mathbb{N})$ ორობითი კოეფიციენტების საშუალებით, შემდეგნაირად

$$V(n) = n_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |n_k - n_{k-1}|.$$

ავღნიშნოთ k-ური რადემახარის ფუნქცია შემდეგნაირად

$$r_k(x) := (-1)^{x_k} \qquad (x \in G,\ k \in \mathbb{N}).$$

რადემახარის ფუნქციების საშუალებით განვმარტოთ უოლშის სისტემა $w := (w_n : n \in \mathbb{N})$ G-ზე შემდეგი გზით:

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) = r_{|n|}(x)(-1)^{\sum\limits_{k=0}^{|n|-1} n_k x_k} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

$L_p(G)$ სივრცის ნორმა (ნახევარნორმა) განიმარტება შემდეგნაირად

$$\|f\|_p := \left(\int_G |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} \qquad (0 < p < \infty).$$

$weak - L_p(G)$ სივრცე შეიცავს ისეთ f ფუნქციებს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{weak-L_p(G)} := \sup_{\lambda > 0} \lambda \mu (x \in G : |f| > \lambda)^{1/p} < +\infty.$$

უოლშის სისტემა არის ორთონორმირებული და სრული $L_2(G)$-ში (იხ. [30]).

ნებისმიერი $f \in L_1(G)$-თვის რიცხვებს

$$\widehat{f}(n) := \int_G f(x) w_n(x) d\mu(x),$$

ეწოდება f ფუნქციის n-ური ფურიე-უოლშის კოეფიციენტები.

ავღნიშნოთ S_n-ით f ფუნქციის n-ური კერძო ჯამი:

$$S_n(f;x) := \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{f}(i) w_i(x).$$

დირიხლეს გულები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$D_n(x) := \sum_{i=0}^{n-1} w_i(x).$$

ჩვენ ასევე განვმარტავთ შემდეგ მაქსიმალურ ოპერატორებს

$$\begin{aligned} S^* f &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n f| \\ \widetilde{S}^*_{\#} f &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_{2^n} f| \end{aligned}$$

σ-ალგებრა განსაზღვრული ინტერვალებით $I_n(x)$ რომელთა ზომაც არის 2^{-n} ავღნიშნოთ $F_n\,(n\in\mathbb{N})$-ით.

პირობითი მათემატიკური ლოდინი $F_n\,(n\in\mathbb{N})$ ნაკადის მიმართ ავღნიშნოთ E_n-ით და ის ჩვენ კონკრეტულ შემთხვევაში გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} E_n f(x) &= S_{2^n} f(x) \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \widehat{f}(k)\, w_k(x) \\ &= \frac{1}{|I_n(x)|}\int_{I_n(x)} f(x) d\mu(x), \end{aligned}$$

სადაც $|I_n(x)| = 2^{-n}$ აღნიშნავს $I_n(x)$ ინტერვალის სიგრძეს.

$f_n \in L_1(G)$ ფუნქციების მიმდევრობას $f = (f_n,\ n\in\mathbb{N})$ ეწოდება ორობითი მარტინგალი თუ აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას (დეტალებისთვის იხ. [30])

(i) f_n არის ზომადი F_n $\sigma-$ალგებრის მიმართ, ნებისმიერი $n\in\mathbb{N}$-თვის,

(ii) $E_n f_m = f_n$ ნებისმიერი $n \le m$-თვის.

f მარტინგალის მაქსიმალური ფუნქცია განიმარტება შემდეგნაირად

$$f^* = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n|\,.$$

იმ შემთხვევაში, თუ $f \in L_1(G)$, მაშინ როგორც ცნობილია, მისი მაქსიმალური ფუნქცია განინარტება შემდეგნაირად:

$$f^*(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\mu(I_n(x))} \left| \int_{I_n(x)} f(u)\, d\mu(u) \right|.$$

$0 < p < \infty$-თვის ჰარდის მარტინგალური სივრცე $H_p(G)$ შეიცავს ყველა მარტინგალს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{H_p(G)} := \|f^*\|_p < \infty.$$

შემდეგ ჩვენ მოვიყვანთ p-ატომების განმარტებას, რომელიც მეტად მნიშვნელოვანია ჰარდის სივრცეების დახასიათებისთვის.

შემოსაზღვრულ ზომად ფუნქციას a-ს ეწოდება p-ატომი, თუ არსებობს ორობითი ინტერვალი I, ისეთი, რომ

$$\begin{cases} a) & \int_I a d\mu = 0, \\ b) & \|a\|_\infty \le \mu(I)^{-1/p}, \\ c) & \operatorname{supp}(a) \subset I. \end{cases}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ყოველი $f = (f_n, n\in\mathbb{N})$ მარტინგალისთვის და ყოველი $k\in\mathbb{N}$-თვის არსებობს ზღვარი

$$\widehat{f}(k) := \lim_{n\to\infty} \int_G f_n(x)\, w_k(x)\, d\mu(x)$$

და მას ეწოდება f-ის k-ური ფურიე-უოლშის კოეფიციენტი.

თუ $f_0 \in L_1(G)$ და $f := (E_n f_0 : n \in \mathbb{N})$ არის მარტინგალი და

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \int_G f(x)\, w_k(x) d\mu(x) \\ &= \widehat{f_0}(k), \ k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

უწყვეტობის მოდული $H_p(G)$ სივრცეში განიმარტება შემდეგნაირად

$$\omega_{H_p(G)}\left(\frac{1}{2^n}, f\right) := \|f - S_{2^n} f\|_{H_p(G)}.$$

ჩვენ გვჭირდება ავღწეროთ თუ რა აზრით გვესმის სხვაობა $f - S_{2^n} f$, სადაც f არის მარტინგალი და $S_{2^n} f$ არის ფუნქცია:

შენიშვნა 2.1.1: ვთქვათ $0 < p \le 1$. მას შემდეგ რაც

$$S_{2^n} f = f^{(n)} \in L_1(G), \ \text{სადაც } f = \left(f^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right) \in H_p(G)$$

ამიტომ შეგვიძლია განვიხილოთ მისით წარმოქმნილი მარტინგალი:

$$\begin{aligned} &\left(S_{2^k} f^{(n)} : k \in \mathbb{N}\right) \\ = &\ (S_{2^k} S_{2^n}, k \in \mathbb{N}) \\ = &\ (S_{2^0} f, \ldots, S_{2^{n-1}} f, S_{2^n} f, S_{2^n} f, \ldots) \\ = &\ \left(f^{(0)}, \ldots, f^{(n-1)}, f^{(n)}, f^{(n)}, \ldots\right). \end{aligned}$$

საიდანაც $f - S_{2^n} f$ სხვაობის ქვეშ ვგულისხმობთ შემდეგ მარტინგალს:

$$f := ((f - S_{2^n} f)^{(k)}, \ \ k \in \mathbb{N})$$

სადაც

$$(f - S_{2^n} f)^{(k)} = \begin{cases} 0, & k = 0, \ldots, n, \\ f^{(k)} - f^{(n)}, & k \ge n+1, \end{cases}$$

შესაბამისად $\|f - S_{2^n} f\|_{H_p(G)}$ ნორმის ქვეშ გვესმის სწორედ

$$f - S_{2^n} f = ((f - S_{2^n} f)^{(k)}, k \in \mathbb{N})$$

მარტინგალის H_p ნორმა.

2.2 დამხმარე დებულებები

პირველ რიგში ჩამოვაყალიბებთ და დავამტკიცებთ ერთგანზომილებიან უოლშის სისტემის მიმართ დირიხლეს გულებისა და ლებეგის კონსტანტების ტოლობებს და შეფასებებს (იხ. ლემა 2.2.1-ლემა 3.2.5).

შემდეგი ლემის პირველი ტოლობა მოყვანილია [30]-ში, ხოლო მეორე ტოლობა კი დამტკიცებულია გატის და გოგინავას [10] მიერ:

ლემა 2.2.1. *ვთქვათ $j,n\in\mathbb{N}$. მაშინ*

$$D_{j+2^n}=D_{2^n}+w_{2^n}D_j,\ \textit{როცა}\ \ j\leq 2^n,$$

და

$$D_{2^n-j}=D_{2^n}-\psi_{2^n-1}D_j,\ \textit{როცა}\ \ j<2^n.$$

შემდეგი ერთგანზომილებიანი უოლშის სისტემის მიმართ დირიხლეს გულის ტოლობები დამტკიცებულია [30]-ში:

ლემა 2.2.2. *ვთქვათ $n\in\mathbb{N}$. მაშინ*

$$D_{2^n}\left(x\right)=\begin{cases}2^n, & \textit{თუ}\ \ x\in I_n,\\ 0, & \textit{თუ}\ x\notin I_n,\end{cases}$$

და

$$D_n=w_n\sum_{k=0}^{\infty}n_kr_kD_{2^k}=w_n\sum_{k=0}^{\infty}n_k\left(D_{2^{k+1}}-D_{2^k}\right),\ \ n=\sum_{i=0}^{\infty}n_i2^i.$$

შემდეგი ერთგანზომილებიანი უოლშის სისტემის მიმართ დირიხლეს გულის ლებეგის კონსტანტების ორმხრივი შეფასება დამტკიცებულია [30]-ში, ხოლო ლემის მეორე უტოლობა დამტკიცებულია ფაინის მიერ [5]-ში:

ლემა 2.2.3. *ვთქვათ $n\in\mathbb{N}$. მაშინ*

$$\frac{1}{8}V\left(n\right)\leq\left\|D_n\right\|_1\leq V\left(n\right)$$

და

$$\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}V\left(k\right)=\frac{1}{4\log 2}+o\left(1\right).$$

ჰარდის მარტინგალური სივრცე $H_p\left(G\right)$ ნებისმიერი $0<p\leq 1$-თვის შეიძლება დახასიათდეს p-ატომების დახმარებით. სამართლიანია შემდეგი (დეტალებისთვის იხ. [33], [51] და [55]):

ლემა 2.2.4. *მარტინგალი $f=(f_n,\ n\in\mathbb{N})$ ეკუთვნის $H_p(G)\,(0<p\leq 1)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს p-ატომების მიმდევრობა $(a_k,\ k\in\mathbb{N})$ და ნამდვილი რიცხვების მიმდევრობა $(\mu_k,\ k\in\mathbb{N})$ ისეთი, რომ ყოველი $n\in\mathbb{N}$-თვის*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu_kS_{2^n}a_k=f_n \tag{2.2}$$

და

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\mu_k\right|^p<\infty.$$

უფრო მეტიც,

$$\|f\|_{H_p(G)}\backsim\inf\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\mu_k\right|^p\right)^{1/p},$$

სადაც ინფიმუმი აღებულია f-ის ყოველ წარმოდგენებს შორის, რომელსაც აქვს (2.2) სახე.

მარტინგალის შემდეგი მაგალითი გამოყენებული იქნება ბევრჯერ ამ დისერტაციაში, რათა დავამტკიცოთ მოყვანილი დადებითი შედეგების სიზუსტე სხვადასხვა აზრით. ამ ტიპის მარტინგალების კერძო მაგალითები პირველად გამოყენებულია გოგინავას შრომებში [15] (იხ. აგრეთვე [14]). ამ ტიპის კონსტრუქციები ასევე გამოყენებულია სტატიებში [23], [24], [41], [45], [46], [48]. ერთგანზომილებიან შემთხვევაში ჩვენ ძირითადად დავეყრდნობით ჩემს შვედურ სადოქტორო დისერტაციაში აგებულ კონსტრუქციებს (დეტალებისთვის იხ. [49]), ამიტომ აქ არ მოვიყვანთ დამტკიცების დეტალებს.

მაგალითი 2.2.1: ვთქვათ $0 < p \leq 1$, $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის ნამდვილი რიცხვების მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|^p \leq c_p < \infty \tag{2.3}$$

და $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის p-ატომების მიმდევრობა, განსაზღვრული ტოლობით

$$a_k(x) := 2^{|\alpha_k|(1/p-1)} \left(D_{2^{|\alpha_k|+1}}(x) - D_{2^{|\alpha_k|}}(x) \right),$$

სადაც $|\alpha_k| := \max \{ j \in \mathbb{N} : (\alpha_k)_j \neq 0 \}$ და $(\alpha_k)_j$ აღნიშნავს $\alpha_k \in \mathbb{N}_+$ რიცხვის ორობით წარმოდგენაში j-ურ ბინალურ კოეფიციენტს. მაშინ $f = (f_n : \ n \in \mathbb{N})$, სადაც

$$f_n(x) := \sum_{\{k: \, |\alpha_k| < n\}} \lambda_k a_k(x)$$

არის მარტინგალი, რომელიც ეკუთვნის $H_p(G)$-ს ნებისმიერი $0 < p \leq 1$-თვის.

ამ მარტინგალის ფურიეს კოეფიციენტები გამოითვლება ფორმულით:

$$\widehat{f}(j) \tag{2.4}$$

$$= \begin{cases} \lambda_k 2^{(1/p-1)|\alpha_k|}, & j \in \left\{ 2^{|\alpha_k|}, ..., 2^{|\alpha_k|+1} - 1 \right\}, \ k \in \mathbb{N}_+, \\ 0, & j \notin \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left\{ 2^{|\alpha_k|}, ..., 2^{|\alpha_k|+1} - 1 \right\}. \end{cases}$$

ვთქვათ $2^{|\alpha_{l-1}|+1} \leq j \leq 2^{|\alpha_l|}$, $l \in \mathbb{N}_+$. მაშინ

$$\begin{aligned} S_j f &= S_{2^{|\alpha_{l-1}|+1}} \\ &= \sum_{\eta=0}^{l-1} \lambda_\eta 2^{|\alpha_\eta|(1/p-1)} \left(D_{2^{|\alpha_\eta|+1}} - D_{2^{|\alpha_\eta|}} \right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

ვთქვათ $2^{|\alpha_l|} \leq j < 2^{|\alpha_l|+1}$, $l \in \mathbb{N}_+$. მაშინ

$$\begin{aligned} & S_j f \\ = \ & S_{2^{|\alpha_l|}} + \lambda_l 2^{(1/p-1)|\alpha_l|} w_{2^{|\alpha_l|}} D_{j-2^{|\alpha_l|}} \\ = \ & \sum_{\eta=0}^{l-1} \lambda_\eta 2^{(1/p-1)|\alpha_\eta|} \left(D_{2^{|\alpha_\eta|+1}} - D_{2^{|\alpha_\eta|}} \right) \\ + \ & \lambda_l 2^{(1/p-1)|\alpha_l|} w_{2^{|\alpha_l|}} D_{j-2^{|\alpha_l|}}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

უფრო მეტიც, უწყვეტობის მოდულისთვის ნებისმიერი $0<p\leq 1$-თვის გვაქვს შემდეგი შეფასება:

$$\omega_{H_p}\left(\frac{1}{2^n},f\right)=O\left(\sum_{\{k:\,|\alpha_k|\geq n\}}^{\infty}|\lambda_k|^p\right)^{1/p},\quad \text{როცა}\quad n\to\infty. \tag{2.7}$$

ვეისის ლემა 2.2.4-ის გამოყენებით ადვილად მტკიცდება შემდეგი თეორემის სამართლიანობა, რომელიც ასევე დამტკიცებულია [55]-ში:

ლემა 2.2.5. *ვთქვათ $0<p\leq 1$ და T არის σ-სუბწრფივი ოპერატორი ისეთი, რომ ნებისმიერი p-ატომ a-თვის*

$$\int\limits_G |Ta(x)|^p\,d\mu(x)\leq c_p<\infty.$$

მაშინ

$$\|Tf\|_p\leq c_p\,\|f\|_{H_p(G)}\,. \tag{2.8}$$

თუ დამატებით T შემოსაზღვრულია $L_\infty(G)$-დან $L_\infty(G)$-ში, მაშინ (2.8)-ის დასამტკიცებლად საკმარისია, რომ ნებისმიერი p-ატომ a-თვის შემოწმდეს

$$\int\limits_{\overline{I}} |Ta(x)|^p\,d\mu(x)\leq c_p<\infty,$$

სადაც I აღნიშნავს a ატომის სუპორტს.

კერძო შემთხვევებში არსებობს ჰარდის სივრცის ნორმის დათვლის უფრო მარტივი საშუალებები (დეტალებისთვის იხ. [33], [51] და [52]):

ლემა 2.2.6. *თუ $g\in L_1(G)$ და $f:=(E_ng:n\in\mathbb{N})$ არის რეგულარული მარტინგალი, მაშინ $H_p(G)$ $0<p\leq 1$ ნორმა გამოითვლება შემდეგნაირად*

$$\|f\|_{H_p(G)}=\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}|S_{2^n}g|\right\|_p.$$

შემდეგ ლემაში მოყვანილი შედეგები დამტკიცებულია სტატიებში [41], [45], [46].

ლემა 2.2.7. *ვთქვათ $0<p\leq 1$, $2^k\leq n<2^{k+1}$ და S_nf არის უოლშის სისტემის n-ური კერძო ჯამი, სადაც $f\in H_p(G)$. მაშინ ნებისმიერი ფიქსირებული $n\in\mathbb{N}$-თვის*

$$\begin{aligned}\|S_nf\|_{H_p(G)}^p &\leq \left\|\sup_{0\leq l\leq k}|S_{2^l}f|\right\|_p^p+\|S_nf\|_p^p\\ &\leq \left\|\widetilde{S}_{\#}^*f\right\|_p^p+\|S_nf\|_p^p.\end{aligned}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ჩვენ განვიხილავთ შემდეგ მარტინგალს

$$\begin{aligned} f_{\#} &:= (S_{2^k}S_nf,\ k\in\mathbb{N}_+)\\ &= (S_{2^0},S_{2^k}f,\ S_nf,...,S_nf,...)\,,\end{aligned}$$

რასაც ლემა 2.2.6-ის დახმარებით დაუყოვნებლივ მოყვება

$$\begin{aligned} & \|S_n f\|_{H_p(G)}^p \\ \leq & \left\|\sup_{0\leq l\leq k}|S_{2^l} f|\right\|_p^p + \|S_n f\|_p^p \\ \leq & \left\|\widetilde{S}_{\#}^* f\right\|_p^p + \|S_n f\|_p^p . \end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

□

2.3 ერთგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების კერძო ჯამების ქვემიმდევრობების შემოსაზღვრულობა მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე

ეს თავი ეძღვნება ერთგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების კერძო ჯამების ქვემიმდევრობების განშლადობის ზუსტი რიგის საკითხების შესწავლას (დეტალებისთვის იხ. [45]).

თეორემა 2.3.1. *ა) ვთქვათ $0 < p < 1$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ*

$$\|S_n f\|_{H_p(G)} \leq c_p 2^{d(n)(1/p-1)} \|f\|_{H_p(G)} .$$

ბ) ვთქვათ $0 < p < 1$, $\{m_k : \ k \in \mathbb{N}_+\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} d(m_k) = \infty \tag{2.9}$$

და $\Phi : \mathbb{N}_+ \to [1,\infty)$ არის არაუარყოფითი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{2^{d(m_k)(1/p-1)}}{\Phi(m_k)} = \infty. \tag{2.10}$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$ ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \frac{S_{m_k} f}{\Phi(m_k)} \right\|_{weak-L_p(G)} = \infty.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავუშვათ, რომ გვაქვს შემდეგი უტოლობა:

$$\left\|2^{(1-1/p)d(n)} S_n f\right\|_p \leq c_p \|f\|_{H_p(G)} . \tag{2.11}$$

ლემა 2.2.7-ის და უტოლობების (1.7)-ის და (2.11)-ის გამოყენებით, მას შემდეგ რაც

$2^{(1-1/p)d(n)} \leq c_p$, ჩვენ მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \left\|2^{(1-1/p)d(n)} S_n f\right\|_{H_p(G)}^p \qquad (2.12) \\ \leq & \left\|2^{(1-1/p)d(n)} S_n f\right\|_p^p + 2^{(1-1/p)d(n)} \left\|\widetilde{S}_{\#}^* f\right\|_p^p \\ \leq & \; c_p \|f\|_{H_p(G)}^p + c_p \left\|\widetilde{S}_{\#}^* f\right\|_p^p \\ \leq & \; c_p \|f\|_{H_p(G)}^p . \end{aligned}$$

ლემა 2.2.5-ის და (2.12)-ის გამოყენებით თეორემა 2.3.1 დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენეთ შემდეგი:

$$\int_G \left|2^{(1-1/p)d(n)} S_n a\right|^p d\mu \leq c_p < \infty, \qquad (2.13)$$

ნებისმიერი p-ატომ a-თვის, რომელსაც აქვს სუპორტი I, ისეთი რომ $\mu(I) = 2^{-M}$.

ზოგადობის შეუზღუდავად, ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ p-ატომ a-ს აქვს სუპორტი $I = I_M$. მაშინ ადვილი საჩვენებელია, რომ $S_n a = 0$, სადაც $2^M \geq n$. ამიტომ საინტერესოა განვიხილოთ მხოლოდ ისეთი n-ები, რომლებისთვისაც $2^M < n$. თუ გამოვიყენებთ p-ატომის შეფასებას (იხილეთ p-ატომის განმარტება) $\|a\|_\infty \leq 2^{M/p}$ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} & \left|2^{(1-1/p)d(n)} S_n a(x)\right| \qquad (2.14) \\ \leq & \; 2^{(1-1/p)d(n)} \|a\|_\infty \int_{I_M} |D_n(x+t)| \, d\mu(t) \\ \leq & \; 2^{M/p} 2^{(1-1/p)d(n)} \int_{I_M} |D_n(x+t)| \, d\mu(t) . \end{aligned}$$

ვთქვათ $x \in I_M$. მას შემდეგ რაც $V(n) \leq 2d(n)$, ლემა 2.2.3-ის პირველი შეფასების გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \left|2^{(1-1/p)d(n)} S_n a\right| \\ \leq & \; 2^{M/p} 2^{(1-1/p)d(n)} V(n) \\ \leq & \; 2^{M/p} d(n) \, 2^{(1-1/p)d(n)} \end{aligned}$$

და

$$\begin{aligned} & \int_{I_M} \left|2^{(1-1/p)d(n)} S_n a\right|^p d\mu \qquad (2.15) \\ \leq & \; d(n) \, 2^{(1-1/p)d(n)} < c_p < \infty . \end{aligned}$$

ვთქვათ $t \in I_M$ და $x \in I_s \backslash I_{s+1}$, სადაც $0 \leq s \leq M-1 < \langle n \rangle$ ან $0 \leq s < \langle n \rangle \leq M-1$. მაშინ $x+t \in I_s \backslash I_{s+1}$ და ლემა 2.2.2-ის ორივე ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ $D_n(x+t) = 0$, საიდანაც საბოლოოდ დავასკვნით

$$\left|2^{(1-1/p)d(n)} S_n a(x)\right| = 0. \qquad (2.16)$$

ვთქვათ $x \in I_s \backslash I_{s+1}$, $\langle n \rangle \leq s \leq M-1$. მაშინ $x+t \in I_s \backslash I_{s+1}$, სადაც $t \in I_M$. მაშინ ისევ ლემა 2.2.2-ის ორივე ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$|D_n(x+t)| \leq \sum_{j=0}^{s} n_j 2^j \leq c 2^s .$$

უტოლობა (2.14)-ის დახმარებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} & \left|2^{(1-1/p)d(n)}S_n a\left(x\right)\right| \\ \leq & \ 2^{(1-1/p)d(n)}2^{M/p}\frac{2^s}{2^M} \\ \leq & \ 2^{\langle n\rangle(1/p-1)}2^{M(1/p-1)}\frac{2^s}{2^{|n|(1/p-1)}} \\ \leq & \ 2^{\langle n\rangle(1/p-1)}2^s. \end{aligned} \tag{2.17}$$

(2.1) იგივეობის და (2.16) და (2.17) უტოლობების გამოყენებით საბოლოოდ მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \int_{\overline{I_M}}\left|2^{(1-1/p)d(n)}S_n a\left(x\right)\right|^p d\mu\left(x\right) \\ = & \sum_{s=\langle n\rangle}^{M-1}\int_{I_s\setminus I_{s+1}}\left|2^{\langle n\rangle(1/p-1)}2^s\right|^p d\mu\left(x\right) \\ \leq & \ c\sum_{s=\langle n\rangle}^{M-1}\frac{2^{\langle n\rangle(1-p)}}{2^{s(1-p)}}\leq c_p<\infty. \end{aligned}$$

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა 2.3.1-ის მეორე ნაწილი. პირობა (2.10)-ის ძალით არსებობს მიმდევრობა $\{\alpha_k:\ k\in\mathbb{N}_+\}\subset\{m_k:\ k\in\mathbb{N}_+\}$, ისეთი, რომ

$$\sum_{\eta=0}^{\infty}\frac{\Phi^{p/2}\left(\alpha_\eta\right)}{2^{d(\alpha_\eta)(1-p)/2}}<\infty, \tag{2.18}$$

ვთქვათ $f=(f_n,n\in\mathbb{N}_+)\in H_p(G)$ არის მარტინგალი მაგალითი 2.2.1-დან, სადაც

$$\lambda_k=\frac{\Phi^{1/2}\left(\alpha_k\right)}{2^{d(\alpha_k)(1/p-1)/2}}. \tag{2.19}$$

მაშინ (2.18)-ის დახმარებით ჩვენ დავასკვნით, რომ შესრულებულია (2.3) პირობა, რაც თავის მხრივ მოგვცემს, რომ $f=(f_n,n\in\mathbb{N}_+)\in H_p(G)$.

თუ გამოვიყენებთ (2.4)-ს, როცა λ_k-ები მოცემულია (2.19) ფორმულით, მაშინ მივიღებთ, რომ ფურიეს კოეფიციენტები გამოითვლება შემდეგნაირად

$$\widehat{f}(j) \tag{2.20}$$

$$=\begin{cases}\Phi^{1/2}\left(\alpha_k\right)2^{(|\alpha_k|+\langle\alpha_k\rangle)(1/p-1)/2}, & \text{თუ } j\in\left\{2^{|\alpha_k|},...,2^{|\alpha_k|+1}-1\right\},\ k\in\mathbb{N}_+ \\ 0, & \text{თუ } j\notin\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\left\{2^{|\alpha_k|},...,2^{|\alpha_k|+1}-1\right\}.\end{cases}$$

(2.6)-ის გათვალისწინებით, როცა λ_k-ები მოცემულია (2.19)-ით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \frac{S_{\alpha_k}f}{\Phi\left(\alpha_k\right)} \\ = & \frac{1}{\Phi\left(\alpha_k\right)}\sum_{\eta=0}^{k-1}\Phi^{1/2}\left(\alpha_\eta\right)2^{(|\alpha_\eta|+\langle\alpha_\eta\rangle)(1/p-1)/2}\left(D_{2^{|\alpha_\eta|+1}}-D_{2^{|\alpha_\eta|}}\right) \\ + & \frac{2^{(|\alpha_k|+\langle\alpha_k\rangle)(1/p-1)/2}w_{2^{|\alpha_k|}}D_{\alpha_k-2^{|\alpha_k|}}}{\Phi^{1/2}\left(\alpha_k\right)}:=I+II. \end{aligned} \tag{2.21}$$

(2.18) გამოყენებით I-თვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} & \|I\|_{weak-L_p(G)}^p \\ \leq & \frac{1}{\Phi^p(\alpha_k)} \sum_{\eta=0}^{k-1} \frac{\Phi^{p/2}(\alpha_\eta)}{2^{d(\alpha_\eta)(1-p)/2}} \left\| 2^{|\alpha_\eta|(1/p-1)} \left(D_{2^{|\alpha_\eta|+1}} - D_{2^{|\alpha_\eta|}} \right) \right\|_{weak-L_p(G)}^p \\ \leq & \frac{1}{\Phi^p(\alpha_k)} \sum_{\eta=0}^{\infty} \frac{\Phi^{p/2}(\alpha_\eta)}{2^{d(\alpha_\eta)(1-p)/2}} \leq c < \infty. \end{aligned} \tag{2.22}$$

ვთქვათ $x \in I_{\langle \alpha_k \rangle} \backslash I_{\langle \alpha_k \rangle +1}$. პირობა (2.18)-ის გათვალისწინებით და ლემა 2.2.2-ის დახმარებით მივიღებთ $|\alpha_k| \neq \langle \alpha_k \rangle$, უფრო მეტიც, $\left\langle \alpha_k - 2^{|\alpha_k|} \right\rangle = \langle \alpha_k \rangle$.

ლემა 2.2.2-ის ორივე უტოლობის გამოყენებით ჩვენ მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \left| D_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}(x) \right| \\ = & \left| \left(D_{2^{\langle \alpha_k \rangle +1}}(x) - D_{2^{\langle \alpha_k \rangle}}(x) \right) + \sum_{j=\langle \alpha_k \rangle +1}^{|\alpha_k|-1} (\alpha_k)_j \left(D_{2^{i+1}}(x) - D_{2^i}(x) \right) \right| \\ = & \left| -D_{2^{\langle \alpha_k \rangle}}(x) \right| = 2^{\langle \alpha_k \rangle} \end{aligned} \tag{2.23}$$

და

$$\begin{aligned} |II| & = \frac{2^{(|\alpha_k| + \langle \alpha_k \rangle)(1/p-1)/2}}{\Phi^{1/2}(\alpha_k)} \left| D_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}(x) \right| \\ & = \frac{2^{|\alpha_k|(1/p-1)/2} 2^{\langle \alpha_k \rangle (1/p+1)/2}}{\Phi^{1/2}(\alpha_k)}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

(2.22) და (2.24) გაერთიანებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{S_{\alpha_k} f}{\Phi(\alpha_k)} \right\|_{weak-L_p(G)}^p \\ \geq & \|II\|_{weak-L_p(G)}^p - \|I\|_{weak-L_p(G)}^p \\ \geq & \frac{2^{(|\alpha_k|)(1/p-1)/2} 2^{\langle \alpha_k \rangle (1/p+1)/2}}{\Phi^{1/2}(\alpha_k)} \mu \left\{ x \in G: \ |II| \geq \frac{2^{(|\alpha_k|)(1/p-1)/2} 2^{\langle \alpha_k \rangle (1/p+1)/2}}{\Phi^{1/2}(\alpha_k)} \right\}^{1/p} \\ \geq & \frac{2^{(|\alpha_k|)(1/p-1)/2} 2^{\langle \alpha_k \rangle (1/p+1)/2}}{\Phi^{1/2}(\alpha_k)} \left(\mu \left\{ I_{\langle \alpha_k \rangle} \backslash I_{\langle \alpha_k \rangle +1} \right\} \right)^{1/p} \\ \geq & c \frac{2^{d(\alpha_k)(1/p-1)/2}}{\Phi^{1/2}(\alpha_k)} \to \infty, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty. \end{aligned}$$

თეორემა 2.3.1 დამტკიცებულია.

□

შედეგი 2.3.1. *ა) ვთქვათ $n \in \mathbb{N}_+$, $0 < p < 1$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ*

$$\|S_n f\|_{H_p(G)} \leq c_p \left(n \mu \left\{ supp \left(D_n \right) \right\} \right)^{1/p-1} \|f\|_{H_p(G)} .$$

ბ) ვთქვათ $0 < p < 1$, $\{m_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} m_k\mu\left\{\mathit{supp}\left(D_{m_k}\right)\right\} = \infty \tag{2.25}$$

და $\Phi : \mathbb{N}_+ \to [1,\infty)$ არის რაიმე არაუარყოფითი, არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\left(m_k\mu\left\{\mathit{supp}\left(D_{m_k}\right)\right\}\right)^{1/p-1}}{\Phi\left(m_k\right)} = \infty. \tag{2.26}$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\|\frac{S_{m_k}f}{\Phi\left(m_k\right)}\right\|_{weak-L_p(G)} = \infty.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ლემა 2.2.2-ის ორივე უტოლობის გამოყენებით ჩვენ მივიღებთ

$$I_{\langle n\rangle}\backslash I_{\langle n\rangle+1} \subset \text{supp}\left\{D_n\right\} \subset I_{\langle n\rangle} \;\text{ და }\; 2^{-\langle n\rangle-1} \leq \mu\left\{\text{supp}\left(D_n\right)\right\} \leq 2^{-\langle n\rangle}.$$

ამას მოყვება, რომ

$$\frac{2^{d(n)(1/p-1)}}{4} \leq \left(n\mu\left\{\text{supp}\left(D_n\right)\right\}\right)^{1/p-1} \leq 2^{d(n)(1/p-1)}.$$

შედეგი 2.3.1 დამტკიცებულია.

□

თეორემა 2.3.2. *ა) ვთქვათ $n \in \mathbb{N}_+$ და $f \in H_1(G)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c, ისეთი, რომ*

$$\left\|S_nf\right\|_{H_1(G)} \leq cV\left(n\right)\left\|f\right\|_{H_1(G)}.$$

ბ) ვთქვათ $\{m_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ არის დადებითი რიცხვების რაიმე მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} V\left(m_k\right) = \infty \tag{2.27}$$

და $\Phi : \mathbb{N}_+ \to [1,\infty)$ არის რაიმე არაუარყოფითი, არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{V\left(m_k\right)}{\Phi\left(m_k\right)} = \infty. \tag{2.28}$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_1(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\|\frac{S_{m_k}f}{\Phi\left(m_k\right)}\right\|_1 = \infty.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მას შემდეგ რაც

$$\left\|\frac{S_nf}{V\left(n\right)}\right\|_1 \leq \left\|f\right\|_1 \leq \left\|f\right\|_{H_1(G)}, \tag{2.29}$$

ლემა 2.2.7-ის და (2.29)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{S_n f}{V(n)} \right\|_{H_1(G)} \\ \leq &\left\| \frac{S_n f}{V(n)} \right\|_1 + \frac{1}{V(n)} \left\| \widetilde{S}_{\#}^{*} f \right\|_1 \\ \leq &c \| f \|_{H_1(G)} + c \left\| \widetilde{S}_{\#}^{*} f \right\|_1 \leq c \| f \|_{H_1(G)}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა 2.3.2-ის მეორე ნაწილი. ვთქვათ $\{m_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა და ფუნქცია $\Phi : \mathbb{N}_+ \to [1, \infty)$ აკმაყოფილებს შესაბამისად (2.27) და (2.28) პირობებს. მაშინ არსებობს ნატურალური რიცხვების არაკლებადი, ზრდადი მიმდევრობა $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}_+\} \subset \{m_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ ისეთი, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi^{1/2}(\alpha_k)}{V^{1/2}(\alpha_k)} \leq \beta < \infty. \tag{2.31}$$

ვთქვათ $f = (f_n, n \in \mathbb{N}_+)$ არის მარტინგალი მაგალითი 2.2.1-დან, სადაც

$$\lambda_k = \frac{\Phi^{1/2}(\alpha_k)}{V^{1/2}(\alpha_k)}. \tag{2.32}$$

(2.31)-ის გამოყენებით ჩვენ დავასკვნით, რომ შესრულებულია (2.3), საიდანაც თავის მხრივ მივიღებთ, რომ $f = (f_n, n \in \mathbb{N}_+) \in H_1(G)$.

თუ გამოვიყენებთ (2.4)-ს, როცა λ_k-ები მოცემულია (2.32) გამოსახულებით, მაშინ

$$\widehat{f}(j) = \begin{cases} \frac{\Phi^{1/2}(\alpha_k)}{V^{1/2}(\alpha_k)}, & \text{თუ } \ j \in \left\{2^{|\alpha_k|}, ..., 2^{|\alpha_k|+1} - 1\right\}, \ k = 0, 1, ... \\ 0, & \text{თუ } \ j \notin \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \left\{2^{|\alpha_k|}, ..., 2^{|\alpha_k|+1} - 1\right\}. \end{cases} \tag{2.33}$$

(2.21)-ის ანალოგიურად თუ გამოვიყენებთ (2.6)-ს, როცა λ_k-ები მოცემულია (2.32)-ით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} &S_{\alpha_k} f \\ = &\sum_{\eta=0}^{k-1} \frac{\Phi^{1/2}(\alpha_\eta)}{V^{1/2}(\alpha_\eta)} \left(D_{2^{|\alpha_\eta|+1}} - D_{2^{|\alpha_\eta|}} \right) \\ + &\frac{\Phi^{1/2}(\alpha_k)}{V^{1/2}(\alpha_k)} w_{2^{|\alpha_k|}} D_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}. \end{aligned}$$

თუ გამოვიყებენთ ლემა 2.2.3-ის პირველ შეფასებას და (2.31)-ს ჩვენ გვაქვს

$$
\begin{aligned}
& \left\|\frac{S_{\alpha_k} f}{\Phi\left(\alpha_k\right)}\right\|_1 \\
\geq\ & \frac{\Phi^{1/2}\left(\alpha_k\right)}{\Phi\left(\alpha_k\right) V^{1/2}\left(\alpha_k\right)}\left\|D_{\alpha_k-2^{\left|\alpha_k\right|}}\right\|_1 \\
-\ & \frac{1}{\Phi\left(\alpha_k\right)} \sum_{\eta=0}^{k-1} \frac{\Phi^{1/2}\left(\alpha_\eta\right)}{V^{1/2}\left(\alpha_\eta\right)}\left\|D_{2^{\left|\alpha_\eta\right|+1}}-D_{2^{\left|\alpha_\eta\right|}}\right\|_1 \\
\geq\ & \frac{V\left(\alpha_k-2^{\left|\alpha_k\right|}\right) \Phi^{1/2}\left(\alpha_k\right)}{8 \Phi\left(\alpha_k\right) V^{1/2}\left(\alpha_k\right)} \\
-\ & \frac{1}{\Phi\left(\alpha_k\right)} \sum_{\eta=0}^{\infty} \frac{\Phi^{1/2}\left(\alpha_\eta\right)}{V^{1/2}\left(\alpha_\eta\right)} \\
\geq\ & \frac{c V^{1/2}\left(\alpha_k\right)}{\Phi^{1/2}\left(\alpha_k\right)} \rightarrow \infty, \text{ როცა } k \rightarrow \infty .
\end{aligned}
$$

თეორემა 2.3.2 დამტკიცებულია.

□

შედეგი 2.3.2. *ვთქვათ $n \in \mathbb{N}$, $0<p \leq 1$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p, ისეთი, რომ სამართლიანია უტოლობა*

$$
\left\|S_{2^n} f\right\|_{H_p(G)} \leq c_p\|f\|_{H_p(G)} . \tag{2.34}
$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. იმისთვის, რომ დავამტკიცოთ შედეგი 2.3.2 ჩვენ მხოლოდ მოგვიწევს, რომ დავთვალოთ

$$
\left|2^n\right|=n, \quad\left\langle 2^n\right\rangle=n-1 \text{ და } d\left(2^n\right)=0 .
$$

თეორემა 2.3.1-ის პირველი ნაწილის გამოყენებით ჩვენ დაუყოვნებლივ მივიღებთ (2.34)-ს, ნებისმიერი $0<p \leq 1$-თვის, რაც ასრულებს შედეგ 2.3.2-ის დამტკიცებას.

□

შედეგი 2.3.3. *ვთქვათ $n \in \mathbb{N}$, $0<p \leq 1$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c, ისეთი, რომ სამართლიანია უტოლობა*

$$
\left\|S_{2^n+2^{n-1}} f\right\|_{H_p(G)} \leq c_p\|f\|_{H_p(G)} . \tag{2.35}
$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მას შემდეგ რაც

$$
\left|2^n+2^{n-1}\right|=n,\left\langle 2^n+2^{n-1}\right\rangle=n-1 \text{ და } d\left(2^n+2^{n-1}\right)=1,
$$

თეორემა 2.3.1-ის პირველი ნაწილის გამოყენებით ჩვენ დაუყოვნებლივ მივიღებთ (2.35)-ს, ნებისმიერი $0<p \leq 1$-თვის, რაც ასრულებს შედეგ 2.3.3-ის დამტკიცებას.

□

შედეგი 2.3.4. *ვთქვათ $n \in \mathbb{N}$ და $0 < p < 1$. მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_{2^n+1} f\|_{weak-L_p(G)} = \infty. \tag{2.36}$$

მეორე მხრივ, არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c, ისეთი, რომ

$$\|S_{2^n+1} f\|_{H_1(G)} \leq c \|f\|_{H_1(G)}. \tag{2.37}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მას შემდეგ რაც

$$|2^n + 1| = n, \langle 2^n + 1 \rangle = 0 \text{ და } d(2^n + 1) = n. \tag{2.38}$$

თეორემა 2.3.1-ის მეორე ნაწილის გამოყენებით ჩვენ გვაქვს, რომ არსებობს მარტინგალი $f = (f_n, n \in \mathbb{N}_+) \in H_p(G)\ (0 < p < 1)$, ისეთი, რომ სრულდება (2.36).

რაც შეეხება უტოლობა (2.37)-ის დამტკიცებას, ის მარტივად გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან რომ

$$V(2^n + 1) = 4 < \infty.$$

შედეგი 2.3.4 დამტკიცებულია.

□

2.4 უწყვეტობის მოდულები და ერთგანზომილებიანი ფურიე -უოლშის მწკრივების კერძო ჯამების ქვემიმდევრობების ნორმით კრებადობა მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე

ამ თავში თეორემა 2.3.1-ს და თეორემა 2.3.2-ს დახმარებით მიღებული იქნება აუცილებელი და საკმარისი პირობები უწყვეტობის მოდულებისთვის, რომელთათვისაც ფურიე-უოლშის მწკრივის კერძო ჯამები შემოსაზღვრული იქნება მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე.

პირველ რიგში დავამტკიცებთ შემდეგ შეფასებას:

თეორემა 2.4.1. *ვთქვათ $n \in \mathbb{N}_+$ და $2^k < n \leq 2^{k+1}$. მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ*

$$\|S_n f - f\|_{H_p(G)} \leq c_p 2^{d(n)(1/p-1)} \omega_{H_p(G)} \left(\frac{1}{2^k}, f \right), \quad (f \in H_p(G)) \quad (0 < p < 1) \tag{2.39}$$

და

$$\|S_n f - f\|_{H_1(G)} \leq c_1 V(n)\, \omega_{H_1(G)} \left(\frac{1}{2^k}, f \right), \quad (f \in H_1(G)). \tag{2.40}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $0 < p < 1$ და $2^k < n \leq 2^{k+1}$. თეორემა 2.3.1-ის პირველი ნაწილის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \|S_n f - f\|_{H_p(G)}^p & (2.41) \\ \leq\ & c_p \|S_n f - S_{2^k} f\|_{H_p(G)}^p + c_p \|S_{2^k} f - f\|_{H_p(G)}^p \\ =\ & c_p \|S_n (S_{2^k} f - f)\|_{H_p(G)}^p + c_p \|S_{2^k} f - f\|_{H_p(G)}^p \\ \leq\ & c_p \left(1 + 2^{d(n)(1-p)}\right) \omega_{H_p(G)}^p \left(\frac{1}{2^k}, f\right) \\ \leq\ & c_p 2^{d(n)(1-p)} \omega_{H_p(G)}^p \left(\frac{1}{2^k}, f\right). \end{aligned}$$

(2.40) შეფასების დამტკიცება არის (2.41)-ის ანალოგიური, ამიტომ ჩვენ გამოვტოვებთ დეტალებს.

თეორემა 2.4.1 დამტკიცებულია.

□

თეორემა 2.4.2. *ა) ვთქვათ $k \in \mathbb{N}_+$, $0 < p < 1$, $f \in H_p(G)$ და $\{m_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, ისეთი, რომ*

$$\omega_{H_p(G)} \left(\frac{1}{2^{|m_k|}}, f\right) = o \left(\frac{1}{2^{d(m_k)(1/p-1)}}\right) \text{ როცა } k \to \infty. \tag{2.42}$$

მაშინ

$$\|S_{m_k} f - f\|_{H_p(G)} \to 0 \text{ როცა } k \to \infty. \tag{2.43}$$

ბ) ვთქვათ $\{m_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (2.9) პირობას. მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$ და ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}_+\} \subset \{m_k : k \in \mathbb{N}_+\}$, რომელთათვისაც სრულდება

$$\omega_{H_p(G)} \left(\frac{1}{2^{|\alpha_k|}}, f\right) = O \left(\frac{1}{2^{d(\alpha_k)(1/p-1)}}\right) \text{ როცა } k \to \infty$$

და

$$\limsup_{k \to \infty} \|S_{\alpha_k} f - f\|_{weak-L_p(G)} > c_p > 0 \text{ როცა } k \to \infty, \tag{2.44}$$

სადაც c_p არის მუდმივი, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $0 < p < 1$, $f \in H_p(G)$ და $\{m_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (2.42) პირობას. თეორემა 2.4.1-ის შეფასება (2.39)-ის გამოყენებით მივიღებთ, რომ სამართლიანია (2.43).

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა 2.4.2-ის მეორე ნაწილი. პირობა (2.9)-დან მარტივად გამომდინარეობს, რომ არსებობს $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}_+\} \subset \{m_k : k \in \mathbb{N}_+\}$, ისეთი რომ

$$2^{d(\alpha_k)} \uparrow \infty, \quad \text{როცა } k \to \infty, \quad 2^{2(1/p-1)d(\alpha_k)} \leq 2^{(1/p-1)d(\alpha_{k+1})}. \tag{2.45}$$

ვთქვათ $f = (f_n, n \in \mathbb{N})$ არის მარტინგალი მაგალითი 2.2.1-დან, სადაც

$$\lambda_i = 2^{-(1/p-1)d(\alpha_i)}, \tag{2.46}$$

(2.45)-ის გამოყენებით ჩვენ დავადგენთ, რომ შესრულებულია (2.3) პირობა, საიდანაც მივიღებთ, რომ $f \in H_p(G)$.

თუ გამოვიყენებთ (2.4)-ს, როცა λ_k-ები მოცემულია (2.46)-ით, მაშინ

$$\widehat{f}(j) = \begin{cases} 2^{(1/p-1)\langle\alpha_k\rangle}, & \text{თუ } \ j \in \left\{2^{|\alpha_k|}, ..., 2^{|\alpha_k|+1}-1\right\}, \ k \in \mathbb{N}_+, \\ 0, & \text{თუ } \ j \notin \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \left\{2^{|\alpha_k|}, ..., 2^{|\alpha_k|+1}-1\right\}. \end{cases} \tag{2.47}$$

(2.45)-ის და (2.7)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \omega_{H_p(G)}\left(\frac{1}{2^{|\alpha_k|}}, f\right) \\ \leq & \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^{(1/p-1)d(\alpha_i)}} \\ = & O\left(\frac{1}{2^{(1/p-1)d(\alpha_k)}}\right), \ \text{ როცა } \ k \to \infty. \end{aligned} \tag{2.48}$$

(2.23)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\left|D_{\alpha_k - 2^{\langle\alpha_k\rangle}}\right| \geq 2^{\langle\alpha_k\rangle}, \quad \text{ სადაც } \quad I_{\langle\alpha_k\rangle} \backslash I_{\langle\alpha_k\rangle+1}.$$

(2.6)-ის დახმარებით მივიღებთ

$$S_{\alpha_k} f = S_{2^{|\alpha_k|}} f + 2^{(1/p-1)\langle\alpha_k\rangle} w_{2^{|\alpha_k|}} D_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}},$$

მას შემდეგ რაც

$$\begin{aligned} & \|D_{\alpha_k}\|_{weak-L_p(G)} \\ \geq & 2^{\langle\alpha_k\rangle} \mu \left\{x \in I_{\langle\alpha_k\rangle} \backslash I_{\langle\alpha_k\rangle+1} : \ |D_{\alpha_k}| \geq 2^{\langle\alpha_k\rangle}\right\}^{1/p} \\ \geq & 2^{\langle\alpha_k\rangle} \left(\mu \left\{I_{\langle\alpha_k\rangle} \backslash I_{\langle\alpha_k\rangle+1}\right\}\right)^{1/p} \geq 2^{\langle\alpha_k\rangle(1-1/p)}, \end{aligned}$$

თუ გამოვიყენებთ (1.2)-ს (იხ. აგრეთვე თეორემა T2) შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} & \|f - S_{\alpha_k} f\|_{weak-L_p(G)}^p \\ \geq & 2^{(1-p)\langle\alpha_k\rangle} \|w_{2^{|\alpha_k|}} D_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}\|_{weak-L_p(G)}^p \\ - & \|f - S_{2^{|\alpha_k|}} f\|_{weak-L_p(G)}^p \\ \geq & c - o(1) > c > 0, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty. \end{aligned}$$

რაც ასრულებს თეორემა 2.4.2-ის დამტკიცებას.

□

შედეგი 2.4.1. *ა) ვთქვათ* $0 < p < 1$, $f \in H_p(G)$ *და* $\{m_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ *არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, ისეთი, რომ*

$$\omega_{H_p(G)}\left(\frac{1}{2^{|m_k|}}, f\right) = o\left(\frac{1}{\left(m_k \mu\left(\textsf{supp} D_{m_k}\right)\right)^{1/p-1}}\right) \ \text{როცა } \ k \to \infty. \tag{2.49}$$

მაშინ შესრულებულია (2.43).

ბ) ვთქვათ $\{m_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\sup_{k\in\mathbb{N}_+} m_k\mu\left\{supp\left(D_{m_k}\right)\right\} = \infty. \tag{2.50}$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$ და მიმდევრობა $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}_+\} \subset \{m_k : k \in \mathbb{N}_+\}$, რომლებისთვისაც

$$\omega_{H_p(G)}\left(\frac{1}{2^{|\alpha_k|}}, f\right) = O\left(\frac{1}{\left(\alpha_k\mu\left(suppD_{\alpha_k}\right)\right)^{1/p-1}}\right) \text{ როცა } k \to \infty.$$

და ადგილი აქვს (2.44)-ს.

თეორემა 2.4.3. *ა) ვთქვათ $f \in H_1(G)$ და $\{m_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას*

$$\omega_{H_1(G)}\left(\frac{1}{2^{|m_k|}}, f\right) = o\left(\frac{1}{V\left(m_k\right)}\right) \text{ როცა } k \to \infty. \tag{2.51}$$

მაშინ

$$\|S_{m_k}f - f\|_{H_1(G)} \to 0 \text{ როცა } k \to \infty. \tag{2.52}$$

ბ) ვთქვათ $\{m_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (2.27) პირობას.

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_1(G)$ და ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}_+\} \subset \{m_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ ისეთი, რომ

$$\omega_{H_1(G)}\left(\frac{1}{2^{|\alpha_k|}}, f\right) = O\left(\frac{1}{V\left(\alpha_k\right)}\right) \text{ როცა } k \to \infty$$

და

$$\limsup_{k\to\infty} \|S_{\alpha_k}f - f\|_1 > c > 0 \text{ როცა } k \to \infty, \tag{2.53}$$

სადაც c არის აბსოლუტური მუდმივი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $f \in H_1(G)$ და $\{m_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (2.51) პირობას. თეორემა 2.4.1-ის გამოყენებით მივიღებთ, რომ შესრულებულია (2.52).

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა 2.4.3-ის მეორე ნაწილი. (2.27)-დან არსებობს მიმდევრობა $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}_+\} \subset \{m_k : k \in \mathbb{N}_+\}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$V(\alpha_k) \uparrow \infty, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty \quad \text{და} \quad V^2(\alpha_k) \leq V(\alpha_{k+1}) \quad k \in \mathbb{N}_+. \tag{2.54}$$

ვთქვათ $f = (f_n, n \in \mathbb{N}_+)$ არის მარტინგალი მაგალითი 2.2.1-დან, სადაც

$$\lambda_k = \frac{1}{V(\alpha_k)},$$

(2.54)-ის გამოყენებით მივიღებთ, რომ შესრულებულია უტოლობა (2.3), საიდანაც მივიღებთ, რომ $f = (f_n, n \in \mathbb{N}_+) \in H_1(G)$.

თუ მივმართავთ (2.4)-ს მივიღებთ

$$\widehat{f}(j)=\begin{cases}\frac{1}{V(\alpha_k)}, & \text{თუ} \ \ j\in\left\{2^{|\alpha_k|},...,2^{|\alpha_k|+1}-1\right\}, \ k=0,1,...\\ 0, & \text{თუ} \ \ j\notin\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\left\{2^{|\alpha_k|},...,2^{|\alpha_k|+1}-1\right\}.\end{cases} \tag{2.55}$$

თუ გამოვიყენებთ (2.7)-ს მივიღებთ

$$\begin{aligned} & w_{H_1(G)}(1/2^n,f) \\ = \ & \|f-S_{2^n}f\|_{H_1(G)}\leq\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{V(\alpha_i)} \\ = \ & O\left(\frac{1}{V(\alpha_n)}\right), \quad \text{როცა} \quad n\to\infty. \end{aligned} \tag{2.56}$$

(2.6)-ის დახმარებით მივიღებთ

$$S_{\alpha_k}f=S_{2^{|\alpha_k|}}f+\frac{w_{2^{|\alpha_k|}}D_{\alpha_k-2^{|\alpha_k|}}}{V(\alpha_k)},$$

თუ გამოვიყენებთ (1.2)-ს (იხ. აგრეთვე თეორემა T2) და (2.4)-ს, საბოლოოდ გვექ-ნება

$$\begin{aligned} & \|f-S_{\alpha_k}f\|_1 \\ \geq \ & \|\frac{w_{2^{|\alpha_k|}}D_{\alpha_k-2^{|\alpha_k|}}}{V(\alpha_k)}\|_1-\|f-S_{2^{|\alpha_k|}}f\|_1 \\ \geq \ & \frac{V(\alpha_k-2^{|\alpha_k|})}{8V(\alpha_k)}-o(1)>c>0, \quad \text{როცა} \quad k\to\infty. \end{aligned}$$

რაც ასრულებს თეორემა 2.4.3-ის დამტკიცებას.

□

თეორემა 3.4.2-ის დახმარებით მარტივად მიიღება [43]-ში დამტკიცებული მნიშვნე-ლოვანი შედეგები:

შედეგი 2.4.2. *ა) ვთქვათ* $0<p<1$, $f\in H_p(G)$ *და*

$$\omega_{H_p(G)}\left(1/2^k,f\right)=o\left(1/2^{k(1/p-1)}\right), \ \text{როცა} \ \ k\to\infty.$$

მაშინ

$$\|S_kf-f\|_{H_p(G)}\to 0, \ \text{როცა} \ k\to\infty.$$

ბ) არსებობს მარტინგალი $f\in H_p(G)$ $(0<p<1)$, *რომლისთვისაც*

$$\omega_{H_p(G)}\left(1/2^k,f\right)=O\left(1/2^{k(1/p-1)}\right), \ \text{როცა} \ \ k\to\infty$$

და

$$\|S_kf-f\|_{weak-L_p(G)}\nrightarrow 0, \ \text{როცა} \ k\to\infty.$$

შედეგი 2.4.3. *ა) ვთქვათ* $f \in H_1(G)$ *და*

$$\omega_{H_1(G)}\left(1/2^k, f\right) = o\left(\frac{1}{\log k}\right), \text{ როცა } k \to \infty.$$

მაშინ

$$\|S_k f - f\|_{H_1(G)} \to 0, \text{ როცა } k \to \infty.$$

ბ) არსებობს მარტინგალი $f \in H_1(G)$, *რომლისთვისაც*

$$\omega_{H_1(G)}\left(1/2^k, f\right) = O\left(\frac{1}{\log k}\right), \text{ როცა } k \to \infty$$

და

$$\|S_k f - f\|_1 \nrightarrow 0, \text{ როცა } k \to \infty.$$

ერთგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების ფეიერის საშუალოები მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე

3.1 განმარტებები და აღნიშვნები

ერთგანზომილებიან შემთხვევაში ავღნიშნოთ ფეიერის (მარცინკევიჩ-ფეიერის) საშუალოები σ_n-ით:

$$\sigma_n f(x) \quad : \quad = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k f(x) \qquad (n \in \mathbb{N}_+) .$$

სამართლიანია შემდეგი ტოლობა (დეტალებისთვის იხ. [2] და [30])

$$\begin{aligned} \sigma_n f(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (D_k * f)(x) \\ &= (f * K_n)(x) = \int_{G_m} f(t) K_n(x-t) \, d\mu(t) . \end{aligned}$$

სადაც

$$K_n(x) \quad : \quad = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} D_k(x) \qquad (n \in \mathbb{N}_+)$$

ლიტერატურაში K_n ფეიერის გულის სახელითაა ცნობილი.
ჩვენ ასევე განვმარტავთ შემდეგ მაქსიმალურ ოპერატორებს

$$\begin{aligned} \sigma^* f &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |\sigma_n f| \\ \widetilde{\sigma}^*_{\#} f &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |\sigma_{2^n} f| . \end{aligned}$$

.

ნატურალური $n \in \mathbb{N}$ რიცხვისთვის ჩვენ ასევე გვჭირდება შემდეგი წარმოდგენა

$$n = \sum_{i=1}^{s} 2^{n_i}, \qquad n_1 < n_2 < ... < n_s.$$

ავღნიშნოთ

$$n^{(i)} = 2^{n_1} + ... + 2^{n_{i-1}}, \quad i = 2, ..., s$$

და

$$\mathbb{A}_{0,2} = \left\{ n \in \mathbb{N} : \; n = 2^0 + 2^2 + \sum_{i=3}^{s_n} 2^{n_i} \right\}.$$

ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$-თვის არსებობს რიცხვები

$$0 \leq l_1 \leq m_1 \leq l_2 - 2 < l_2 \leq m_2 \leq ... \leq l_s - 2 < l_s \leq m_s$$

ისეთი, რომ ის შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=l_i}^{m_i} 2^k,$$

სადაც s დამოკიდებულია მხოლოდ n-ზე.

ადვილი სანახავია, რომ

$$s \leq V(n) \leq 2s + 1.$$

3.2 დამხმარე დებულებები

ფეიერის გულების შემდეგი ტოლობა და შეფასება დამტკიცებულია [30]-ში:

ლემა 3.2.1. *ვთქვათ $n \in \mathbb{N}$ და $n = \sum_{i=1}^{s} 2^{n_i}$, $n_1 < n_2 < ... < n_s$. მაშინ*

$$nK_n = \sum_{r=1}^{s} \left(\prod_{j=r+1}^{s} w_{2^{n_j}} \right) 2^{n_r} K_{2^{n_r}} + \sum_{t=2}^{s} \left(\prod_{j=t+1}^{s} w_{2^{n_j}} \right) n^{(t)} D_{2^{n_t}},$$

და

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_G |K_n(x)| \, d\mu(x) \leq c < \infty,$$

სადაც c არის აბსოლუტური მუდმივი.

შემდეგი ტოლობა დამტკიცებულია [30]-ში (იხ. აგრეთვე [8]):

ლემა 3.2.2. *ვთქვათ $n > t$ და $t, n \in \mathbb{N}$. მაშინ უოლშის სისტემის მიმართ 2^n-ური ფეიერის გულისთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:*

$$K_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^{t-1}, & \text{თუ } x \in I_n(e_t), \\ \frac{2^n+1}{2}, & \text{თუ } x \in I_n, \\ 0, & \text{სხვაგან.} \end{cases}$$

შემდეგი შეფასება დამტკიცებულია გოგინავას მიერ [13]-ში:

ლემა 3.2.3. *ვთქვათ $x \in I_{l+1}(e_k + e_l)$, $k = 0, ..., M-2$, $l = 0, ..., M-1$. მაშინ*

$$\int_{I_M} |K_n(x+t)| \, d\mu(t) \leq \frac{c2^{l+k}}{n2^M}, \quad \text{სადაც } n > 2^M.$$

ვთქვათ $x \in I_M(e_k)$, $m = 0, ..., M-1$. *მაშინ*

$$\int_{I_M} |K_n(x+t)| \, d\mu(t) \le \frac{c2^k}{2^M}, \quad \text{სადაც} \quad n > 2^M,$$

სადაც c *არის აბსოლუტური მუდმივი.*

უოლშის სისტემის მიმართ ფეიერის გულების შემდეგი შეფასება დამტკიცებულია [46]-ში:

ლემა 3.2.4. *ვთქვათ*

$$n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=l_i}^{m_i} 2^k,$$

სადაც

$$m_1 \ge l_1 > l_1 - 2 \ge m_2 \ge l_2 > l_2 - 2 > ... > m_s \ge l_s \ge 0.$$

მაშინ

$$|nK_n| \le c \sum_{A=1}^{r} \left(2^{l_A} |K_{2^{l_A}}| + 2^{m_A} |K_{2^{m_A}}| + 2^{l_A} \sum_{k=l_A}^{m_A} D_{2^k} \right) + cV(n),$$

სადაც c *არის აბსოლუტური მუდმივი.*

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ

$$n = \sum_{i=1}^{r} 2^{n_i}, \quad n_1 > n_2 > ... > n_r \ge 0.$$

ლემა 3.2.1-ში ფეიერის n-ური გულის წარმოდგენის საშუალებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} nK_n &= \sum_{A=1}^{r} \left(\prod_{j=1}^{A-1} w_{2^{n_j}} \right) \left(\left(2^{n_A} K_{2^{n_A}} + \left(2^{n_A} - 1 \right) D_{2^{n_A}} \right) \right) \\ &- \sum_{A=1}^{r} \left(\prod_{j=1}^{A-1} w_{2^{n_j}} \right) \left(2^{n_A} - 1 - n^{(A)} \right) D_{2^{n_A}} = I_1 - I_2. \end{aligned}$$

I_1-თვის შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი ტოლობა

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{v=1}^{r} \left(\prod_{j=1}^{v-1} \prod_{i=l_j}^{m_j} w_{2^i} \right) \left(\sum_{k=l_v}^{m_v} \left(\prod_{j=k+1}^{m_v} w_{2^j} \right) \left(2^k K_{2^k} - \left(2^k - 1 \right) D_{2^k} \right) \right) \\ &= \sum_{v=1}^{r} \left(\prod_{j=1}^{v-1} \prod_{i=l_j}^{m_j} w_{2^i} \right) \left(\sum_{k=0}^{m_v} - \sum_{k=0}^{l_v-1} \right) \left(\prod_{j=k+1}^{m_v} w_{2^j} \right) \left(2^k K_{2^k} - \left(2^k - 1 \right) D_{2^k} \right) \\ &= \sum_{v=1}^{r} \left(\prod_{j=1}^{v-1} \prod_{i=l_j}^{m_j} w_{2^i} \right) \left(\sum_{k=0}^{m_v} \left(\prod_{j=k+1}^{m_v} w_{2^j} \right) \left(2^k K_{2^k} - \left(2^k - 1 \right) D_{2^k} \right) \right) \\ &- \sum_{v=1}^{r} \left(\prod_{j=1}^{v} \prod_{i=l_j}^{m_j} w_{2^i} \right) \left(\sum_{k=0}^{l_v-1} \left(\prod_{j=k+1}^{l_v-1} w_{2^j} \right) \left(2^k K_{2^k} - \left(2^k - 1 \right) D_{2^k} \right) \right). \end{aligned}$$

მას შემდეგ რაც
$$2^n-1=\sum_{k=0}^{n-1}2^k$$
და
$$\left(2^n-1\right)K_{2^n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{j=k+1}^{n-1}w_{2^j}\right)\left(2^kK_{2^k}-\left(2^k-1\right)D_{2^k}\right),$$
ჩვენ დავასკვნით, რომ
$$\begin{aligned}I_1 &= \sum_{v=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{v-1}\prod_{i=l_j}^{m_j}w_{2^i}\right)\left(2^{m_v+1}-1\right)K_{2^{m_v+1}-1}\\ &- \sum_{v=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{v}\prod_{i=l_j}^{m_j}w_{2^i}\right)\left(2^{l_v}-1\right)K_{2^{l_v}-1}.\end{aligned}$$
თუ გამოვიყენებთ შეფასებებს
$$\left|K_{2^n}\right|\leq c\left|K_{2^{n-1}}\right|$$
და
$$\left|K_{2^n-1}\right|\leq c\left|K_{2^n}\right|+c$$
მივიღებთ
$$\left|I_1\right|\leq c\sum_{v=1}^{r}\left(2^{l_v}\left|K_{2^{l_v}}\right|+2^{m_v}\left|K_{2^{m_v}}\right|+cr\right). \tag{3.1}$$
ვთქვათ $l_j<n_A\leq m_j$, სადაც $j=1,...,s$. მაშინ
$$n^{(A)}\geq\sum_{v=l_j}^{n_A-1}2^v\geq 2^{n_A}-2^{l_j}$$
და
$$2^{n_A}-1-n^{(A)}\leq 2^{l_j}.$$
თუ $l_j=n_A$ სადაც $j=1,...,s$, მაშინ
$$n^{(A)}\leq 2^{m_{j-1}+1}<2^{l_j}.$$
ამ შეფასებების გამოყენებით გვექნება
$$\left|I_2\right|\leq c\sum_{v=1}^{r}2^{l_v}\sum_{k=l_v}^{m_v}D_{2^k}. \tag{3.2}$$
შეფასებების (3.1)-(3.2)-ის გამოყენებით მივიღებთ ლემა 3.2.4-ის დამტკიცებას.

$\square$

უოლშის სისტემის მიმართ ფეიერის გულების შემდეგი შეფასება ასევე დამტკიცებულია [46]-ში:

ლემა 3.2.5. *ვთქვათ*

$$n=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=l_i}^{m_i}2^k,$$

სადაც

$$0\leq l_1\leq m_1\leq l_2-2<l_2\leq m_2\leq ...\leq l_s-2<l_s\leq m_s.$$

მაშინ

$$n\left|K_n\left(x\right)\right|\geq\frac{2^{2l_i}}{16},\quad \text{სადაც}\quad x\in I_{l_i+1}\left(e_{l_i-1}+e_{l_i}\right).$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ლემა 3.2.1-ში ფეიერის n-ური გულის წარმოდგენის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} nK_n &= \sum_{r=1}^{s}\sum_{k=l_r}^{m_r}\left(\prod_{j=r+1}^{s}\prod_{q=l_j}^{m_j}w_{2^q}\prod_{j=k+1}^{m_r}w_{2^j}\right)2^kK_{2^k}\\ &+ \sum_{r=1}^{s}\sum_{k=l_r}^{m_r}\left(\prod_{j=r+1}^{s}\prod_{q=l_j}^{m_j}w_{2^q}\prod_{j=k+1}^{m_r}w_{2^j}\right)\left(\sum_{t=1}^{r-1}\sum_{q=l_t}^{m_t}2^q+\sum_{q=l_r}^{k-1}2^q\right)D_{2^k}.\end{aligned}$$

ვთქვათ $x\in I_{l_i+1}\left(e_{l_i-1}+e_{l_i}\right)$. მაშინ

$$\begin{aligned} & n\left|K_n\right|\\ \geq & \left|2^{l_i}K_{2^{l_i}}\right|-\sum_{r=1}^{i-1}\sum_{k=l_r}^{m_r}\left|2^kK_{2^k}\right|-\sum_{r=1}^{i-1}\sum_{k=l_r}^{m_r}\left|2^kD_{2^k}\right|\\ = & I-II-III.\end{aligned}$$

ლემა 3.2.2-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$I=\left|2^{l_i}K_{2^{l_i}}\left(x\right)\right|=\frac{2^{2l_i}}{4}. \tag{3.3}$$

მას შემდეგ რაც $m_{i-1}\leq l_i-2$, ადვილად დავასკვნით, რომ სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$\begin{aligned} II &\leq \sum_{n=0}^{l_i-2}\left|2^nK_{2^n}\left(x\right)\right| \qquad (3.4)\\ &\leq \sum_{n=0}^{l_i-2}2^n\frac{\left(2^n+1\right)}{2}\\ &\leq \frac{2^{2l_i}}{24}+\frac{2^{l_i}}{4}-\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

III-თვის მივიღებთ

$$III\leq\sum_{k=0}^{l_i-2}\left|2^kD_{2^k}\left(x\right)\right|\leq\sum_{k=0}^{l_i-2}4^k=\frac{2^{2l_i}}{12}-\frac{1}{3}. \tag{3.5}$$

(3.3-3.5)-ის გაერთიანებით გვაქვს

$$n\left|K_{n}\left(x\right)\right|\geq I-II-III\geq\frac{2^{2l_{i}}}{8}-\frac{2^{l_{i}}}{4}+1. \qquad (3.6)$$

დავუშვათ, რომ $l_i \geq 2$. მაშინ

$$n\left|K_{n}\left(x\right)\right|\geq\frac{2^{2l_{i}}}{8}-\frac{2^{2l_{i}}}{16}\geq\frac{2^{2l_{i}}}{16}.$$

თუ $l_i = 0$ ან $l_i = 1$, მაშინ (3.6) გამოყენებით მივიღებთ

$$n\left|K_{n}\left(x\right)\right|\geq\frac{7}{8}\geq\frac{2^{2l_{i}}}{16},$$

რაც ასრულებს ლემის დამტკიცებას.

□

უოლშის სისტემის მიმართ ფეიერის გულების შემდეგი შეფასება ასევე დამტკიცებულია [46]-ში (იხ. აგრეთვე [49]-ში):

ლემა 3.2.6. *ვთქვათ $0<p\leq 1$, $2^k \leq n < 2^{k+1}$ და $\sigma_n f$ არის უოლშის სისტემის მიმართ n-ური ფეიერის საშუალო, სადაც $f\in H_p(G)$. მაშინ ნებისმიერი ფიქსირებული $n\in\mathbb{N}$-თვის*

$$\begin{aligned}&\left\|\sigma_{n}f\right\|_{H_{p}(G)}\\ &\leq\left\|\sup_{0\leq l\leq k}\left|\sigma_{2^{l}}f\right|\right\|_{p}+\left\|\sup_{0\leq l\leq k}\left|S_{2^{l}}f\right|\right\|_{p}+\left\|\sigma_{n}f\right\|_{p}\\ &\leq\left\|\widetilde{\sigma}_{\#}^{*}f\right\|_{p}+\left\|\widetilde{S}_{\#}^{*}f\right\|_{p}+\left\|\sigma_{n}f\right\|_{p}.\end{aligned}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ შემდეგი მარტინგალი

$$\begin{aligned}f_{\#}&=\left(S_{2^{k}}\sigma_{n}f,\ k\in\mathbb{N}\right)\\ &=\left(\frac{2^{0}\sigma_{2^{0}}}{n}+\frac{(n-2^{0})S_{2^{0}}f}{n},...,\frac{2^{k}\sigma_{2^{k}}f}{n}+\frac{(n-2^{k})S_{2^{k}}f}{n},\sigma_{n}f,...,\sigma_{n}f,...\right).\end{aligned}$$

რასაც ლემა 2.2.6-ის დახმარებით დაუყოვნებლივ მოყვება

$$\begin{aligned}&\left\|\sigma_{n}f\right\|_{H_{p}(G^{2})}^{p}\\ &\leq\left\|\sup_{0\leq l\leq k}\left|\sigma_{2^{l}}f\right|\right\|_{p}^{p}+\left\|\sup_{0\leq l\leq k}\left|S_{2^{l}}f\right|\right\|_{p}^{p}+\left\|S_{n}f\right\|_{p}^{p}\\ &\leq\left\|\widetilde{\sigma}_{\#}^{*}f\right\|_{p}^{p}+\left\|\widetilde{S}_{\#}^{*}f\right\|_{p}^{p}+\left\|\sigma_{n}f\right\|_{p}^{p}.\end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

□

3.3 ერთგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების ფეიერის საშუალოების ქვემიმდევრობების შემოსაზღვრულობა მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე

ეს თავი ეძღვნება ერთგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების ფეიერის საშუალოების ქვემიმდევრობების განშლადობის ზუსტი რიგის საკითხების შესწავლას (დეტალებისთვის იხ. [46]).

პირველ რიგში განვიხილავთ $p=1/2$ შემთხვევას. სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

თეორემა 3.3.1. *ა) ვთქვათ $f\in H_{1/2}(G)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c, ისეთი, რომ*

$$\|\sigma_n f\|_{H_{1/2}(G)}\le cV^2(n)\|f\|_{H_{1/2}(G)}.$$

ბ) ვთქვათ $\{n_k: k\in\mathbb{N}_+\}$ არის ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, ისეთი, რომ $\sup_{k\in\mathbb{N}_+}V(n_k)=\infty$ და $\Phi:\mathbb{N}_+\to[1,\infty)$ არის არაუარყოფითი, არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს $\Phi(n)\uparrow\infty$ და

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{V^2(n_k)}{\Phi(n_k)}=\infty. \tag{3.7}$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f\in H_{1/2}(G)$, ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|\frac{\sigma_{n_k}f}{\Phi(n_k)}\right\|_{1/2}=\infty.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავუშვათ, რომ შესრულებულია უტოლობა

$$\left\|\frac{\sigma_n f}{V^2(n)}\right\|_{1/2}\le c\|f\|_{H_{1/2}(G)}. \tag{3.8}$$

შეფასება (1.7), (1.15) და ლემა 3.2.6-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\sigma_n f}{V^2(n)}\right\|^{1/2}_{H_{1/2}(G)} && (3.9)\\
\le\ &\left\|\frac{\sigma_n f}{V^2(n)}\right\|^{1/2}_{1/2}+\frac{1}{V^2(n)}\left\|\sigma^*_{\#}f\right\|^{1/2}_{1/2}+\frac{1}{V^2(n)}\left\|\widetilde{S}^*_{\#}\right\|^{1/2}_{1/2}\\
\le\ &\left\|\frac{\widetilde{\sigma}_n f}{V^2(n)}\right\|^{1/2}_{1/2}+\left\|\widetilde{\sigma}^*_{\#}f\right\|^{1/2}_{1/2}+\left\|\widetilde{S}^*_{\#}f\right\|^{1/2}_{1/2}\\
\le\ &c\|f\|^{1/2}_{H_{1/2}(G)}.
\end{aligned}$$

ლემა 2.2.5-ის და (3.9)-ის გამოყენებით, თეორემა 3.3.1 დამტკიცებული იქნება თუ ვაჩვენეთ, რომ

$$\int_{\overline{I_M}}\left(\frac{|\sigma_n a|}{V^2(n)}\right)^{1/2}d\mu\le c<\infty,$$

ნებისმიერი 1/2-ატომ a-თვის.

ზოგადობის შეუზღუდავად ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ a არის $1/2$-ატომი, რომელსაც აქვს სუპორტი I, რომლისთვისაც $\mu(I)=2^{-M}$, $I=I_M$. ადვილი სანახავია, რომ $\sigma_n(a)=0$, როცა $n\leq 2^M$. შებრუნებით, ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $n>2^M$.

ავღნიშნოთ

$$II^1_{\alpha_A}(x):=2^M\int_{I_M}2^{\alpha_A}\left|K_{2^{\alpha_A}}(x+t)\right|d\mu(t),$$
$$II^2_{l_A}(x)=2^M\int_{I_M}2^{l_A}\sum_{k=l_A}^{m_A}D_{2^k}(x+t)\,d\mu(t).$$

ვთქვათ $x\in I_M$. მას შემდეგ რაც σ_n არის შემოსაზღვრული $L_\infty(G)$-დან $L_\infty(G)$-ში, $n>2^M$ და $\|a\|_\infty\leq 2^{2M}$, ლემა 3.2.4-ის გამოყენებით დავადგენთ

$$\begin{aligned}
&\frac{|\sigma_n a(x)|}{V^2(n)}\\
&\leq\frac{c}{V^2(n)}\int_{I_M}|a(x)|\left|K_n(x+t)\right|d\mu(t)\\
&\leq\frac{c\|a\|_\infty}{V^2(n)}\int_{I_M}\left|K_n(x+t)\right|d\mu(t)\\
&\leq\frac{c2^{2M}}{V^2(n)}\int_{I_M}\left|K_n(x+t)\right|d\mu(t)\\
&\leq\frac{c2^M}{V^2(n)}\left\{\sum_{A=1}^{s}\int_{I_M}2^{l_A}\left|K_{2^{l_A}}(x+t)\right|d\mu(t)+\int_{I_M}2^{m_A}\left|K_{2^{m_A}}(x+t)\right|d\mu(t)\right\}\\
&+\frac{c2^M}{V^2(n)}\sum_{A=1}^{s}\int_{I_M}2^{l_A}\sum_{k=l_A}^{m_A}D_{2^k}(x+t)\,d\mu(t)+\frac{c2^M}{V^2(n)}\int_{I_M}V(n)\,d\mu(t)\\
&=\frac{c}{V^2(n)}\sum_{A=1}^{s}\left(II^1_{l_A}(x)+II^1_{m_A}(x)+II^2_{l_A}(x)\right)+c.
\end{aligned}$$

აქედან

$$\begin{aligned}
&\int_{\overline{I_M}}\left|\frac{\sigma_n a(x)}{V^2(n)}\right|^{1/2}d\mu(x)\\
\leq\;&\frac{c}{V(n)}\left(\sum_{A=1}^{s}\int_{\overline{I_M}}\left|II^1_{l_A}(x)\right|^{1/2}d\mu(x)\right.\\
&\left.+\int_{\overline{I_M}}\left|II^1_{m_A}(x)\right|^{1/2}d\mu(x)+\int_{\overline{I_M}}\left|II^2_{l_A}(x)\right|^{1/2}d\mu(x)\right)+c.
\end{aligned}$$

მას შემდეგ რაც $s\leq 4V(n)$, ჩვენ დავადგენთ, რომ თეორემა 3.3.1 დამტკიცებული იქნება თუ ვაჩვენეთ, რომ

$$\int_{\overline{I_M}}\left|II^1_{\alpha_A}(x)\right|^{1/2}d\mu(x)\leq c<\infty,\quad\int_{\overline{I_M}}\left|II^2_{l_A}(x)\right|^{1/2}d\mu(x)\leq c<\infty,\tag{3.10}$$

სადაც $\alpha_A=l_A$ ან $\alpha_A=m_A$, $A=1,...,s$.

ვთქვათ $t\in I_M$ და $x\in I_{l+1}\left(e_k+e_l\right),\,0\leq k<l<\alpha_A\leq M$ ან $0\leq k<l\leq M\leq\alpha_A$. მას შემდეგ რაც $x+t\in I_{l+1}\left(e_k+e_l\right)$, ლემა 3.2.2-ის გამოყენებით მოვიღებთ

$$K_{2^{\alpha_A}}\left(x+t\right)=0\ \text{ და }\ II^1_{\alpha_A}\left(x\right)=0. \tag{3.11}$$

ვთქვათ $x\in I_{l+1}\left(e_k+e_l\right),\,0\leq k<\alpha_A\leq l\leq M$. მაშინ $x+t\in I_{l+1}\left(e_k+e_l\right)$, სადაც $t\in I_M$ და თუ გამოვიყენებთ ისევ 3.2.2-ს მივიღებთ

$$2^{\alpha_A}\left|K_{2^{\alpha_A}}\left(x+t\right)\right|\leq 2^{\alpha_A+k}\ \text{ და }\ II^1_{\alpha_A}\left(x\right)\leq 2^{\alpha_A+k}. \tag{3.12}$$

(3.12)-ის ანალოგიურად ჩვენ შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ თუ $0\leq\alpha_A\leq k<l\leq M$, მაშინ

$$2^{\alpha_A}\left|K_{2^{\alpha_A}}\left(x+t\right)\right|\leq 2^{2\alpha_A},\ \ II^1_{\alpha_A}\left(x\right)\leq 2^{2\alpha_A},\ t\in I_M,\ x\in I_{l+1}\left(e_k+e_l\right), \tag{3.13}$$

ვთქვათ $0\leq\alpha_A\leq M-1$, სადაც $A=1,...,s$. მაშინ (2.1)-ის და (3.11)-(3.13) შეფასებების გათვალისწინებით გვაქვს

$$\begin{aligned}
&\int_{\overline{I_M}}\left|II^1_{\alpha_A}\left(x\right)\right|^{1/2}d\mu\left(x\right)\\
=\ &\sum_{k=0}^{M-2}\sum_{l=k+1}^{M-1}\int_{I_{l+1}\left(e_k+e_l\right)}\left|II^1_{\alpha_A}\left(x\right)\right|^{1/2}d\mu\left(x\right)\\
+\ &\sum_{k=0}^{M-1}\int_{I_M\left(e_k\right)}\left|II^1_{\alpha_A}\left(x\right)\right|^{1/2}d\mu\left(x\right)\\
\leq\ &c\sum_{k=0}^{\alpha_A-1}\sum_{l=\alpha_A+1}^{M-1}\int_{I_{l+1}\left(e_k+e_l\right)}2^{\left(\alpha_A+k\right)/2}d\mu\left(x\right)\\
+\ &c\sum_{k=\alpha_A}^{M-2}\sum_{l=k+1}^{M-1}\int_{I_{l+1}\left(e_k+e_l\right)}2^{\alpha_A}d\mu\left(x\right)\\
+\ &c\sum_{k=0}^{\alpha_A-1}\int_{I_M\left(e_k\right)}2^{\left(\alpha_A+k\right)/2}d\mu\left(x\right)+c\sum_{k=\alpha_A}^{M-1}\int_{I_M\left(e_k\right)}2^{\alpha_A}d\mu\left(x\right)\\
\leq\ &c\sum_{k=0}^{\alpha_A-1}\sum_{l=\alpha_A+1}^{M-1}\frac{2^{\left(\alpha_A+k\right)/2}}{2^l}+c\sum_{k=\alpha_A}^{M-2}\sum_{l=k+1}^{M-1}\frac{2^{\alpha_A}}{2^l}\\
+\ &c\sum_{k=0}^{\alpha_A-1}\frac{2^{\left(\alpha_A+k\right)/2}}{2^M}+c\sum_{k=\alpha_A}^{M-1}\frac{2^{\alpha_A}}{2^M}\leq c<\infty.
\end{aligned}$$

ვთქვათ $\alpha_A\geq M$. $II^1_{\alpha_A}\left(x\right)$-საც ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ შესრულებულია (3.10), სადაც $A=1,...,s$..

ახლა დავამტკიცოთ $II^2_{l_A}$-ის შემოსაზღვრულობა. ვთქვათ $t\in I_M$ და $x\in I_i\backslash I_{i+1}$, $i\leq l_A-1$. მას შემდეგ რაც $x+t\in I_i\backslash I_{i+1}$, თუ გამოვიყენებთ ლემა 2.2.2-ის პირველ ტოლობას მივიღებთ

$$II^2_{l_A}\left(x\right)=0. \tag{3.14}$$

ვთქვათ $x\in I_i\backslash I_{i+1}$, $l_A\leq i\leq m_A$. მას შემდეგ რაც $n\geq 2^M$ და $t\in I_M$, თუ გამოვიყენებთ ისევ ლემა 2.2.2-ის პირველ ტოლობას ვაჩვენებთ

$$II^2_{l_A}\left(x\right)\leq 2^M\int_{I_M}2^{l_A}\sum_{k=l_A}^{i}D_{2^k}\left(x+t\right)d\mu\left(t\right)\leq c2^{l_A+i}. \tag{3.15}$$

ვთქვათ $x\in I_i\backslash I_{i+1},\, m_A<i\leq M-1$. მაშინ $x+t\in I_i\backslash I_{i+1}$, ნებისმიერი $t\in I_M$-თვის და ლემა 2.2.2-ის პირველ ტოლობის მეშვეობით გვაქვს შემდეგი შეფასება

$$II_{l_A}^2(x)\leq c2^M\int_{I_M}2^{l_A+m_A}\leq c2^{l_A+m_A}. \tag{3.16}$$

ვთქვათ $0\leq l_A\leq m_A\leq M$. მაშინ (2.1)-ის და (3.14-3.16) შეფასებების მხედველობაში მიღებით დავადგენთ

$$\begin{aligned}
&\int_{\overline{I_M}}\left|II_{l_A}^2(x)\right|^{1/2}d\mu(x)\\
=&\left(\sum_{i=0}^{l_A-1}+\sum_{i=l_A}^{m_A}+\sum_{i=m_A+1}^{M-1}\right)\int_{I_i\backslash I_{i+1}}\left|II_{l_A}^2(x)\right|^{1/2}d\mu(x)\\
\leq&\ c\sum_{i=l_A}^{m_A}\int_{I_i\backslash I_{i+1}}2^{(l_A+i)/2}d\mu(x)\\
+&\ c\sum_{i=m_A+1}^{M-1}\int_{I_i\backslash I_{i+1}}2^{(l_A+m_A)/2}d\mu(x)\\
\leq&\ c\sum_{i=l_A}^{m_A}2^{(l_A+i)/2}\frac{1}{2^i}\\
+&\ c\sum_{i=m_A+1}^{M-1}2^{(l_A+m_A)/2}\frac{1}{2^i}\leq c<\infty.
\end{aligned}$$

ანალოგიურად შეგვიძლია დავამტკიცოთ იგივე შეფასებები, იმ შემთხვევებში $0\leq l_A\leq M<m_A$ ან $M\leq l_A\leq m_A$.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა 3.3.1-ის მეორე ნაწილი. (3.7) პირობის გათვალისწინებით არსებობს რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა $\{\alpha_k:\ k\in\mathbb{N}_+\}\subset\{n_k\ :k\in\mathbb{N}_+\}$ ისეთი, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Phi^{1/4}(\alpha_k)}{V^{1/2}(\alpha_k)}\leq c<\infty. \tag{3.17}$$

ვთქვათ $f=(f_n,n\in\mathbb{N}_+)$ არის მარტინგალი მაგალითი 2.2.1-დან, სადაც

$$\lambda_k:=\Phi^{1/2}(\alpha_k)/V(\alpha_k).$$

(3.17)-ის გამოყენებით ჩვენ მივიღებთ, რომ შესრულებულია (3.17), საიდანაც თავის მხრივ მივიღებთ, რომ $f=(f_n,n\in\mathbb{N}_+)$.

თუ გამოვიყენებთ (2.4)-ს მივიღებთ

$$\widehat{f}(j) \tag{3.18}$$

$$=\begin{cases}2^{|\alpha_k|}\Phi^{1/2}(\alpha_k)/V(\alpha_k), & j\in\left\{2^{|\alpha_k|},...,2^{|\alpha_k|+1}-1\right\},\ k\in\mathbb{N}_+\\ 0, & j\notin\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\left\{2^{|\alpha_k|},...,2^{|\alpha_k|+1}-1\right\}.\end{cases}$$

ვთქვათ $2^{|\alpha_k|}<j<\alpha_k$. თუ გამოვიყენებთ (2.6) მივიღებთ

$$S_jf=S_{2^{|\alpha_k|}}f+\frac{w_{2^{|\alpha_k|}}D_{j-2^{|\alpha_k|}}\Phi^{1/2}(\alpha_k)}{V(\alpha_k)} \tag{3.19}$$

საიდანაც

$$
\begin{aligned}
& \frac{\sigma_{\alpha_k} f}{\Phi(\alpha_k)} \\
= & \frac{1}{\Phi(\alpha_k)\alpha_k} \sum_{j=1}^{2^{|\alpha_k|}} S_j f \\
+ & \frac{1}{\Phi(\alpha_k)\alpha_k} \sum_{j=2^{|\alpha_k|}+1}^{\alpha_k} S_j f \\
= & \frac{\sigma_{2^{|\alpha_k|}} f}{\Phi(\alpha_k)\alpha_k} \\
+ & \frac{\left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right) S_{2^{|\alpha_k|}} f}{\Phi(\alpha_k)\alpha_k} \\
+ & \frac{w_{2^{|\alpha_k|}} 2^{|\alpha_k|} \Phi^{1/2}(\alpha_k)}{\Phi(\alpha_k) V(\alpha_k)\alpha_k} \sum_{j=2^{|\alpha_k|}+1}^{\alpha_k} D_{j-2^{|\alpha_k|}} \\
= & III_1 + III_2 + III_3.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

III_3-თვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$
\begin{aligned}
& |III_3| \\
= & \frac{2^{|\alpha_k|}\Phi^{1/2}(\alpha_k)}{\Phi(\alpha_k) V(\alpha_k)\alpha_k} \left| \sum_{j=1}^{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}} D_j \right| \\
= & \frac{2^{|\alpha_k|}\Phi^{1/2}(\alpha_k)}{\Phi(\alpha_k) V(\alpha_k)\alpha_k} \left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right) \left| K_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}} \right| \\
\geq & \frac{c\left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right) \left| K_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}} \right|}{\Phi^{1/2}(\alpha_k) V(\alpha_k).}
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

ვთქვათ

$$
\alpha_k = \sum_{i=1}^{r_k} \sum_{k=l_i^k}^{m_i^k} 2^k,
$$

სადაც

$$
m_1^k \geq l_1^k > l_1^k - 2 \geq m_2^k \geq l_2^k > l_2^k - 2 \geq ... \geq m_s^k \geq l_s^k \geq 0.
$$

მას შემდეგ რაც (იხ. თეორემები 2.3.1 და 3.3.1)

$$
\|III_1\|_{1/2} \leq c, \|III_2\|_{1/2} \leq c,
$$

და

$$
\mu\left\{E_{l_i^k}\right\} \geq 1/2^{l_i^k - 1},
$$

თუ გამოვიყენებთ (3.20), (3.21) და ლემა 3.2.5-ს მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
& \int_G \left|\sigma_{\alpha_k} f(x)/\Phi\left(\alpha_k\right)\right|^{1/2} d\mu\left(x\right) \\
\geq \ & \left\|III_3\right\|_{1/2}^{1/2} - \left\|III_2\right\|_{1/2}^{1/2} - \left\|III_1\right\|_{1/2}^{1/2} \\
\geq \ & c \sum_{i=2}^{r_k-2} \int_{E_{l_i^k}} \left|2^{2l_i^k} / \left(\Phi^{1/2}\left(\alpha_k\right) V\left(\alpha_k\right)\right)\right|^{1/2} d\mu\left(x\right) - 2c \\
\geq \ & c \sum_{i=2}^{r_k-2} 1 / \left(V^{1/2}\left(\alpha_k\right) \Phi^{1/4}\left(\alpha_k\right)\right) - 2c \\
\geq \ & c r_k / \left(V^{1/2}\left(\alpha_k\right) \Phi^{1/4}\left(\alpha_k\right)\right) \\
\geq \ & c V^{1/2}\left(\alpha_k\right) / \Phi^{1/4}\left(\alpha_k\right) \to \infty, \text{ როცა } k \to \infty.
\end{aligned}
$$

თეორემა 3.3.1 დამტკიცებულია.

$\square$

თეორემა 3.3.2. *ა) ვთქვათ* $0 < p < 1/2$, $f \in H_p(G)$. *მაშინ არსებობს მუდმივი* c_p, *რომელიც დამოკიდებულია* p*-ზე, ისეთი, რომ*

$$\left\|\sigma_n f\right\|_{H_p(G)} \leq c_p 2^{d(n)(1/p-2)} \left\|f\right\|_{H_p(G)}.$$

ბ) ვთქვათ $0 < p < 1/2$ *და* $\Phi\left(n\right)$ *არის არაუარყოფითი, არაკლებადი ფუნქცია, ისეთი, რომ*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}_+} d\left(n_k\right) = \infty, \quad \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{2^{d(n_k)(1/p-2)}}{\Phi\left(n_k\right)} = \infty. \tag{3.22}$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$, *ისეთი, რომ*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}_+} \left\|\frac{\sigma_{n_k} f}{\Phi\left(n_k\right)}\right\|_{weak-L_p(G)} = \infty.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $n \in \mathbb{N}$. (3.9)-ის ანალოგიურად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

$$\int_{\overline{I}_M} \left(2^{d(n)(2-1/p)} \left|\sigma_n\left(a\right)\right|\right)^p d\mu \leq c_p < \infty,$$

ნებისმიერი p-ატომ a-თვის, სადაც I აღნიშნავს ამ ატომის სუპორტს.

თეორემა 3.3.1-ის ანალოგიურად ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ რომ, a არის p-ატომი, რომლის სუპორტიც არის $I = I_M$, $\mu\left(I_M\right) = 2^{-M}$ და ასევე $n > 2^M$. მას შემდეგ რაც $\left\|a\right\|_\infty \leq 2^{M/p}$ ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$
\begin{aligned}
& 2^{d(n)(2-1/p)} \left|\sigma_n a\right| \\
\leq \ & 2^{d(n)(2-1/p)} \left\|a\right\|_\infty \int_{I_M} \left|K_n\left(x+t\right)\right| d\mu\left(t\right) \\
\leq \ & 2^{d(n)(2-1/p)} 2^{M/p} \int_{I_M} \left|K_n\left(x+t\right)\right| d\mu\left(t\right).
\end{aligned}
$$

ვთქვათ $x \in I_{l+1}(e_k+e_l), 0 \leq k,l \leq [n] \leq M$. მაშინ ლემა 3.2.2-ის გამოყენებით მივიღებთ $K_n(x+t)=0$, სადაც $t \in I_M$ და

$$2^{d(n)(2-1/p)}|\sigma_n a| = 0. \tag{3.23}$$

ვთქვათ $x \in I_{l+1}(e_k+e_l), [n] \leq k,l \leq M$ ან $k \leq [n] \leq l \leq M$. მაშინ 3.2.4-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} 2^{d(n)(2-1/p)}|\sigma_n a| &\leq 2^{d(n)(2-1/p)}2^{M(1/p-2)+k+l} \\ &\leq c_p 2^{[n](1/p-2)+k+l}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

(2.1)-ის, (3.23)-ის და (3.24)-ის დახმარებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} &\int_{\overline{I_M}}\left|2^{d(n)(2-1/p)}\sigma_n a(x)\right|^p d\mu(x) \\ \leq &\left(\sum_{k=0}^{[n]-2}\sum_{l=k+1}^{[n]-1}+\sum_{k=0}^{[n]-1}\sum_{l=[n]}^{M-1}+\sum_{k=[n]}^{M-2}\sum_{l=k+1}^{M-1}\right)\int_{I_{l+1}(e_k+e_l)}\left|2^{d(n)(2-1/p)}\sigma_n a(x)\right|^p d\mu(x) \\ + &\sum_{k=0}^{M-1}\int_{I_M(e_k)}\left|2^{d(n)(2-1/p)}\sigma_n a(x)\right|^p d\mu(x) \\ \leq &c_p\sum_{k=[n]}^{M-2}\sum_{l=k+1}^{M-1}\frac{1}{2^l}2^{[n](2p-1)}2^{p(k+l)} \\ + &c_p\sum_{k=0}^{[n]}\sum_{l=[n]+1}^{M-1}\frac{1}{2^l}2^{[n](2p-1)}2^{p(k+l)} \\ + &\frac{c_p 2^{[n](2p-1)}}{2^M}\sum_{k=0}^{[n]}2^{p(k+M)} < c_p < \infty. \end{aligned}$$

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა 3.3.2-ის მეორე ნაწილი. პირობა (3.22)-ის გათვალისწინებით, არსებობს ზრდადი ნატურალური რიცხვების მიმდევრობა $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}_+\} \subset \{n_k : k \in \mathbb{N}_+\}$, ისეთი, რომ $\alpha_0 \geq 3$ და

$$\sum_{\eta=0}^{\infty} u^{-p}(\alpha_\eta) < c_p < \infty, \quad u(\alpha_k) = 2^{d(\alpha_k)(1/p-2)/2}/\Phi^{1/2}(\alpha_k). \tag{3.25}$$

ვთქვათ f არის მარტინგალი მაგალითი 2.2.1-დან, სადაც

$$\lambda_k = u^{-1}(\alpha_k),$$

თუ გამოვიყენებთ (3.25) მივიღებთ, რომ შესრულებულია (2.3), საიდანაც მივიღებთ, რომ $f \in H_p(G)$.

თუ მივმართავთ (2.4)-ს მივიღებთ

$$\widehat{f}(j) \tag{3.26}$$

$$= \begin{cases} 2^{|\alpha_k|(1/p-1)}/u(\alpha_k), & j \in \left\{2^{|\alpha_k|},...,2^{|\alpha_k|+1}-1\right\}, \ k \in \mathbb{N}_+, \\ 0, & j \notin \bigcup_{k=0}^{\infty}\left\{2^{|\alpha_k|},...,2^{|\alpha_k|+1}-1\right\}. \end{cases}$$

ვთქვათ $2^{|\alpha_k|} < j < \alpha_k$. მაშინ (3.19)-ის და (3.20)-ის ანალოგიურად, თუ გამოვიყენებთ (3.26)-ს, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma_{\alpha_k} f}{\Phi\left(\alpha_k\right)} \\
= \;& \frac{\sigma_{2^{|\alpha_k|}} f}{\Phi\left(\alpha_k\right)\alpha_k} + \frac{\left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right) S_{2^{|\alpha_k|}} f}{\Phi\left(\alpha_k\right)\alpha_k} \\
+ \;& \frac{2^{|\alpha_k|(1/p-1)}}{\Phi\left(\alpha_k\right) u\left(\alpha_k\right)\alpha_k} \sum_{j=2^{|\alpha_k|}}^{\alpha_k - 1} \left(D_j - D_{2^{|\alpha_k|}}\right) \\
= \;& IV_1 + IV_2 + IV_3.
\end{aligned}$$

ვთქვათ $\alpha_k \in \mathbb{N}$ და $E_{[\alpha_k]} := I_{[\alpha_k]+1}\left(e_{[\alpha_k]-1} + e_{[\alpha_k]}\right)$. მას შემდეგ რაც $\left[\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right] = \left[\alpha_k\right]$, (3.21)-ის ანალოგიურად ლემა 3.2.5-ის გაერთიანებით IV_3-თვის გვაქვს შემდეგი შეფასება

$$\begin{aligned}
\left|IV_3\right| &= \frac{2^{|\alpha_k|(1/p-1)}}{\Phi\left(\alpha_k\right) u\left(\alpha_k\right)\alpha_k} \left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right) \left|K_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}\right| \\
&= \frac{2^{|\alpha_k|(1/p-1)}}{\Phi\left(\alpha_k\right) u\left(\alpha_k\right)\alpha_k} \left|2^{[\alpha_k]} K_{[\alpha_k]}\right| \\
&\geq \frac{2^{|\alpha_k|(1/p-2)} 2^{2[\alpha_k]-4}}{\Phi\left(\alpha_k\right) u\left(\alpha_k\right)} \\
&\geq 2^{|\alpha_k|(1/p-2)/2} 2^{2[\alpha_k]-4} / \Phi^{1/2}\left(\alpha_k\right).
\end{aligned}$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\begin{aligned}
&\left\|IV_3\right\|_{weak-L_p(G)}^p \\
\geq \;& \left(\frac{2^{|\alpha_k|(1/p-2)/2} 2^{2[\alpha_k]-4}}{\Phi^{1/2}\left(\alpha_k\right)}\right)^p \mu\left\{x \in G : \; \left|IV_3\right| \geq \frac{2^{|\alpha_k|(1/p-2)/2} 2^{2[\alpha_k]-4}}{\Phi^{1/2}\left(\alpha_k\right)}\right\} \\
\geq \;& c_p \left(2^{2[\alpha_k] + |\alpha_k|(1/p-2)/2} / \Phi^{1/2}\left(\alpha_k\right)\right)^p \mu(E_{[\alpha_k]}) \\
\geq \;& c_p \left(2^{(|\alpha_k| - [\alpha_k])(1/p-2)} / \Phi\left(\alpha_k\right)\right)^{p/2} \\
= \;& c_p \left(2^{d(\alpha_k)(1/p-2)} / \Phi\left(\alpha_k\right)\right)^{p/2} \to \infty, \text{ როცა } k \to \infty.
\end{aligned}$$

თუ გავაერთიანებთ შედეგ 2.3.2-ს და თეორემა 3.3.2-ის პირველ ნაწილს შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left\|IV_1\right\|_{weak-L_p(G)} \leq c_p < \infty, \quad \left\|IV_2\right\|_{weak-L_p(G)} \leq c_p < \infty.$$

მეორე მხრივ, საკმარისად დიდი -თვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned}
&\left\|\sigma_{\alpha_k} f\right\|_{weak-L_p(G)}^p \\
\geq \;& \left\|IV_3\right\|_{weak-L_p(G)}^p - \left\|IV_2\right\|_{weak-L_p(G)}^p - \left\|IV_1\right\|_{weak-L_p(G)}^p \\
\geq \;& \frac{1}{2}\left\|IV_3\right\|_{weak-L_p(G)}^p \to \infty, \text{ როცა } k \to \infty.
\end{aligned}$$

თეორემა 3.3.2 დამტკიცებულია.

□

შემდეგი ლემების (იხ. ლემები 3.3.1-3.3.3) დამტკიცება არის კერძო ჯამების შესახებ იგივე ტიპის თეორემების (იხ. ლემები 2.3.2-2.3.4) დამტკიცებისა, ამიტომ დამტკიცების გარეშე მოვიყვანთ მათ:

შედეგი 3.3.1. *ვთქვათ $p>0$ და $f\in H_p(G)$. მაშინ*

$$\|\sigma_{2^k}f-f\|_{H_p(G)}\to 0,\ \text{როცა}\ k\to\infty.$$

შედეგი 3.3.2. *ვთქვათ $p>0$ და $f\in H_p(G)$. მაშინ*

$$\|\sigma_{2^k+2^{k-1}}f-f\|_{H_p(G)}\to 0,\ \text{როცა}\ k\to\infty.$$

შედეგი 3.3.3. *ვთქვათ $0<p<1/2$. მაშინ არსებობს მარტინგალი $f\in H_p(G)$, ისეთი, რომ*

$$\|\sigma_{2^k+1}f-f\|_{weak-L_p(G)}\nrightarrow 0,\ \text{როცა}\ k\to\infty.$$

მეორე მხრივ, ნებისმიერი $f\in H_{1/2}(G)$-თვის სამართლიანია შემდეგი:

$$\|\sigma_{2^k+1}f-f\|_{H_{1/2}(G)}\to 0,\ \text{როცა}\ k\to\infty.$$

3.4 უწყვეტობის მოდულები და ერთგანზომილებიანი ფურიე -უოლშის მწკრივების ფეიერის საშუალოების ქვემიმდევრობების ნორმით კრებადობა მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე

ამ თავში გამოყენებული იქნება თეორემა 3.3.1 და თეორემა 3.3.2, რათა მივიღოთ აუცილებელი და საკმარისი პირობები უწყვეტობის მოდულებისთვის, რომელთათვისაც ფურიე-უოლშის მწკრივის ფეიერის საშუალოები შემოსაზღვრული იქნება მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე.

პირველ რიგში დავამტკიცებთ შემდეგს:

თეორემა 3.4.1. *ა)ვთქვათ $f\in H_{1/2}(G)$, $\sup_{k\in\mathbb{N}_+}V(n_k)=\infty$ და*

$$\omega_{H_p(G)}\left(1/2^{|n_k|},f\right)=o\left(1/V^2(n_k)\right),\ \text{როცა}\ \ k\to\infty. \tag{3.27}$$

მაშინ

$$\|\sigma_{n_k}f-f\|_{H_{1/2}(G)}\to 0,\ \text{როცა}\ k\to\infty.$$

ბ) ვთქვათ $\sup_{k\in\mathbb{N}_+}V(n_k)=\infty$. მაშინ არსებობს მარტინგალი $f\in H_{1/2}(G)$, რომლისთვისაც

$$\omega_{H_{1/2}(G)}\left(1/2^{|n_k|},f\right)=O\left(1/V^2(n_k)\right),\ \ \text{როცა}\ \ k\to\infty \tag{3.28}$$

და

$$\|\sigma_{n_k}f-f\|_{H_{1/2}(G)}\nrightarrow 0,\ \ \text{როცა}\ \ k\to\infty. \tag{3.29}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $f \in H_{1/2}(G)$ და $2^k < n \leq 2^{k+1}$. მაშინ

$$\begin{aligned}
&\|\sigma_n f - f\|_{H_{1/2}(G)}^{1/2} \\
&\leq \|\sigma_n f - \sigma_n S_{2^k} f\|_{H_{1/2}(G)}^{1/2} \\
&+ \|\sigma_n S_{2^k} f - S_{2^k} f\|_{H_{1/2}(G)}^{1/2} \\
&+ \|S_{2^k} f - f\|_{H_{1/2}(G)}^{1/2} \\
&= \|\sigma_n \left(S_{2^k} f - f\right)\|_{H_{1/2}(G)}^{1/2} \\
&+ \|S_{2^k} f - f\|_{H_{1/2}(G)}^{1/2} \\
&+ \|\sigma_n S_{2^k} f - S_{2^k} f\|_{H_{1/2}(G)}^{1/2} \\
&\leq c \left(V\left(n\right) + 1\right) \omega_{H_{1/2}(G)}^{1/2} \left(1/2^k, f\right) \\
&+ \|\sigma_n S_{2^k} f - S_{2^k} f\|_{H_{1/2}(G)}^{1/2}.
\end{aligned}$$

ადვილი გამოთვლებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
&\sigma_n S_{2^k} f - S_{2^k} f \\
&= \frac{2^k}{n} \left(S_{2^k} \sigma_{2^k} f - S_{2^k} f\right) \\
&= \frac{2^k}{n} S_{2^k} \left(\sigma_{2^k} f - f\right).
\end{aligned}$$

ვთქვათ $p > 0$. მაშინ შედეგების 2.3.2-ის და 3.3.1-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
&\|\sigma_n S_{2^k} f - S_{2^k} f\|_{H_{1/2}(G)}^{1/2} \\
&\leq \frac{2^{k/2}}{n^{1/2}} \|S_{2^k} \left(\sigma_{2^k} f - f\right)\|_{H_{1/2}(G)}^{1/2} \\
&\leq \|\sigma_{2^k} f - f\|_{H_{1/2}(G)}^{1/2} \to 0, \text{როცა } k \to \infty.
\end{aligned}$$

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა 3.4.1-ის მეორე ნაწილი. მას $\sup_{k \in \mathbb{N}_+} V(\alpha_k) = \infty$, მაშინ არსებობს მარტინგალი $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}_+\} \subset \{n_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ ისეთი, რომ $V(\alpha_k) \uparrow \infty$, როცა $k \to \infty$ და

$$V^2(\alpha_k) \leq V(\alpha_{k+1}). \tag{3.30}$$

ვთქვათ f არის მარტინგალი მაგალითი 2.2.1-დან, სადაც

$$\lambda_k = V^{-2}(\alpha_k),$$

თუ გამოვიყენებთ (3.30) მივიღებთ, რომ შესრულებულია (2.3), საიდანაც მივიღებთ, რომ $f \in H_p(G)$.

თუ მივმართავთ (2.4)-ს მივიღებთ

$$\widehat{f}(j) = \begin{cases} 2^{|\alpha_k|}/V^2(\alpha_k), & j \in \left\{2^{|\alpha_k|}, ..., 2^{|\alpha_k|+1} - 1\right\}, \ k \in \mathbb{N}_+ \\ 0\,, & j \notin \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \left\{2^{|\alpha_k|}, ..., 2^{|\alpha_k|+1} - 1\right\}. \end{cases} \tag{3.31}$$

თუ გამოვიყენებთ (2.7)-ს და (3.30)-ს მივიღებთ

$$w_{H_{1/2}(G)}(1/2^n, f) = \|f - S_{2^n} f\|_{H_{1/2}(G)} \le \sum_{i=n+1}^{\infty} 1/V^2(\alpha_i) = O\left(1/V^2(\alpha_n)\right), \text{ როცა } n \to \infty. \tag{3.32}$$

ვთქვათ $2^{|\alpha_k|} < j \le \alpha_k$. (2.6)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$S_j f = S_{2^{|\alpha_k|}} f + \frac{2^{|\alpha_k|} w_{2^{|\alpha_k|}} D_{j-2^{|\alpha_k|}}}{V^2(\alpha_k)}.$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} & \sigma_{\alpha_k} f - f \\ = & \frac{2^{|\alpha_k|}}{\alpha_k} \left(\sigma_{2^{|\alpha_k|}} f - f\right) \\ + & \frac{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}{\alpha_k} \left(S_{2^{|\alpha_k|}} f - f\right) \\ + & \frac{2^{|\alpha_k|} w_{2^{|\alpha_k|}} \left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right) K_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}}{\alpha_k V^2(\alpha_k)}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

(1.2)-ის, (1.12)-ის და (3.33)-ის დახმარებით გვაქვს

$$\begin{aligned} & \|\sigma_{\alpha_k} f - f\|_{1/2}^{1/2} \\ \ge & \frac{c}{V(\alpha_k)} \| \left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right) K_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}} \|_{1/2}^{1/2} \\ - & \left(\frac{2^{|\alpha_k|}}{\alpha_k}\right)^{1/2} \|\sigma_{2^{|\alpha_k|}} f - f\|_{1/2}^{1/2} \\ - & \left(\frac{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}{\alpha_k}\right)^{1/2} \|S_{2^{|\alpha_k|}} f - f\|_{1/2}^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

ვთქვათ

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{r_k} \sum_{k=l_i^k}^{m_i^k} 2^k,$$

სადაც

$$m_1^k \ge l_1^k > l_1^k - 2 \ge m_2^k \ge l_2^k > l_2^k - 2 > ... > m_s^k \ge l_s^k \ge 0$$

და

$$E_{l_i^k} := I_{l_i^k + 1} \left(e_{l_i^k - 1} + e_{l_i^k}\right).$$

ლემა 3.2.5-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \int_G \left|\left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right) K_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}(x)\right|^{1/2} d\mu \\ \ge & \frac{1}{16} \sum_{i=2}^{r_k - 2} \int_{E_{l_i^k}} \left|\left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right) K_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}(x)\right|^{1/2} d\mu(x) \\ \ge & \frac{1}{16} \sum_{i=2}^{r_k - 2} \frac{1}{2^{l_i^k}} 2^{l_i^k} \ge c r_k \ge c V(\alpha_k). \end{aligned} \tag{3.35}$$

(3.34-3.35) შეფასებების და ასევე შედეგების 2.3.2-ის და 3.3.1-ის გაერთიანებით მივიღებთ (3.29)-ს და თეორემა 3.4.1 დამტკიცებულია.

$\square$

თეორემა 3.4.2. *ა) ვთქვათ* $0 < p < 1/2$, $f \in H_p(G)$, $\sup_{k\in\mathbb{N}_+} d(n_k) = \infty$ *და*

$$\omega_{H_p(G)}\left(1/2^{|n_k|}, f\right) = o\left(1/2^{d(n_k)(1/p-2)}\right), \text{ როცა } k \to \infty. \tag{3.36}$$

მაშინ

$$\|\sigma_{n_k} f - f\|_{H_p(G)} \to 0, \text{ როცა } k \to \infty. \tag{3.37}$$

ბ) ვთქვათ $\sup_{k\in\mathbb{N}_+} d(n_k) = \infty$. *მაშინ არსებობს მარტინგალი* $f \in H_p(G)$ $(0 < p < 1/2)$, *რომლისთვისაც*

$$\omega_{H_p(G)}\left(1/2^{|n_k|}, f\right) = O\left(1/2^{d(n_k)(1/p-2)}\right), \text{ როცა } k \to \infty \tag{3.38}$$

და

$$\|\sigma_{n_k} f - f\|_{weak-L_p(G)} \nrightarrow 0, \text{ როცა } k \to \infty. \tag{3.39}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $0 < p < 1/2$. მაშინ (3.36) პირობის გათვალისწინებით, თუ გავიმეორებთ თეორემა 3.4.1-ში გამოყენებულ მეთოდს, მივიღებთ (3.37)-ის სამართლიანობას.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა 3.4.2-ის მეორე ნაწილი. მას შემდეგ რაც $\sup_k d(n_k) = \infty$, არსებობს $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}_+\} \subset \{n_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ ისეთი, რომ $\sup_{k\in\mathbb{N}_+} d(\alpha_k) = \infty$ და

$$2^{2d(\alpha_k)(1/p-2)} \leq 2^{d(\alpha_{k+1})(1/p-2)}. \tag{3.40}$$

ვთქვათ f არის მარტინგალი მაგალითი 2.2.1-დან, სადაც

$$\lambda_k = 2^{-(1/p-2)d(\alpha_i)}.$$

თუ გამოვიყენებთ (3.40) მივიღებთ რომ შესრულებულია პირობა (2.3), საიდანაც მივიღებთ, რომ $f \in H_p(G)$.

თუ მივმართავთ (2.4)-ს მივიღებთ

$$\widehat{f}(j) = \begin{cases} 2^{(1/p-2)[\alpha_k]}, & j \in \left\{2^{|\alpha_k|}, ..., 2^{|\alpha_k|+1} - 1\right\}, \ k \in \mathbb{N}_+ \\ 0, & j \notin \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \left\{2^{|\alpha_n|}, ..., 2^{|\alpha_n|+1} - 1\right\}. \end{cases} \tag{3.41}$$

(2.7)-ის და (3.40)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \omega_{H_p(G)}(1/2^{|\alpha_k|}, f) \\ \leq & \sum_{i=k}^{\infty} 1/2^{d(\alpha_i)(1/p-2)} \\ = & O\left(1/2^{d(\alpha_k)(1/p-2)}\right) \text{ როცა } k \to \infty. \end{aligned} \tag{3.42}$$

წინა თეორემის ანალოგიურად, თუ ასევე გამოვიყენებთ 2.3.2 და 3.3.1 შედეგებს, საკმარისად დიდი k-თვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} & \|\sigma_{\alpha_k} f - f\|^p_{weak-L_p(G)} \\ \geq\ & 2^{(1-2p)[\alpha_k]} \| \left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right) K_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}} \|^p_{weak-L_p(G)} \\ -\ & \left(\frac{2^{|\alpha_k|}}{\alpha_k}\right)^p \|\sigma_{2^{|\alpha_k|}} f - f\|^p_{weak-L_p(G)} \\ -\ & \left(\frac{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}{\alpha_k}\right)^p \|S_{2^{|\alpha_k|}} f - f\|^p_{weak-L_p(G)} \\ \geq\ & 2^{(1-2p)[\alpha_k]-1} \| \left(\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}\right) K_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}} \|^p_{weak-L_p(G)} \end{aligned} \tag{3.43}$$

ვთქვათ $x \in E_{[\alpha_k]}$. ლემა 3.2.5-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \mu\left(x \in G : (\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}) \left|K_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}\right| \geq 2^{2[\alpha_k]-4}\right) \\ & \geq \mu\left(E_{[\alpha_k]}\right) \geq 1/2^{[\alpha_k]-4} \end{aligned}$$

და

$$\begin{aligned} & 2^{2p[\alpha_k]-4} \mu\left(x \in G : (\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}) \left|K_{\alpha_k - 2^{|\alpha_k|}}\right| \geq 2^{2[\alpha_k]-4}\right) \\ & \geq 2^{(2p-1)[\alpha_k]-4}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

აქედან (1.2)-ის, (1.12)-ის, (3.43)-ის და (3.44)-ის დახმარებით გვაქვს

$$\|\sigma_{n_k} f - f\|_{weak-L_p(G)} \nrightarrow 0, \ \text{როცა} \ k \to \infty$$

და თეორემა 3.4.2 დამტკიცებულია.

□

თეორემა 3.4.2-ის დახმარებით მარტივად მიიღება [42]-ში დამტკიცებული მნიშვნელოვანი შედეგები:

შედეგი 3.4.1. *ა) ვთქვათ $f \in H_{1/2}(G)$ და*

$$\omega_{H_{1/2}(G)}\left(1/2^k, f\right) = o\left(\frac{1}{\log^2 k}\right), \ \text{როცა} \ k \to \infty.$$

მაშინ

$$\|\sigma_k f - f\|_{H_{1/2}(G)} \to 0, \ \text{როცა} \ k \to \infty.$$

ბ) არსებობს მარტინგალი $f \in H_{1/2}(G)$, რომლისთვისაც

$$\omega_{H_{1/2}(G)}\left(1/2^k, f\right) = O\left(\frac{1}{\log^2 k}\right), \ \text{როცა} \ k \to \infty$$

და

$$\|\sigma_k f - f\|_{1/2} \nrightarrow 0, \ \text{როცა} \ k \to \infty.$$

შედეგი 3.4.2. *ა) ვთქვათ $0 < p < 1/2$, $f \in H_p(G)$ და*

$$\omega_{H_p(G)}\left(1/2^k, f\right) = o\left(1/2^{k(1/p-2)}\right), \text{ როცა } k \to \infty.$$

მაშინ

$$\|\sigma_k f - f\|_{H_p(G)} \to 0, \text{ როცა } k \to \infty.$$

ბ) არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$ $(0 < p < 1/2)$, რომლისთვისაც

$$\omega_{H_p(G)}\left(1/2^k, f\right) = O\left(1/2^{k(1/p-2)}\right), \text{ როცა } k \to \infty$$

და

$$\|\sigma_k f - f\|_{weak-L_p(G)} \nrightarrow 0, \text{ როცა } k \to \infty.$$

3.5 ერთგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების ფეიერის საშუალოების ძლიერად შეჯამებადობა მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე

ამ თავში დავამტკიცებული იქნება ფეიერის საშუალოების ძლიერად შეჯამებადობის თეორემები, როცა $0 < p \leq 1/2$ (დეტალებისთვის იხ. [41]).

სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა 3.5.1. *ა) ვთქვათ $0 < p \leq 1/2$ და $f \in H_p(G)$. მაშინ არსებობს მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი, რომ*

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\|\sigma_m f\|_{H_p(G)}^p}{m^{2-2p}} \leq c_p \|f\|_{H_p(G)}^p.$$

ბ) ვთქვათ $0 < p < 1/2$ და $\Phi : \mathbb{N}_+ \to [1, \infty)$ არის არაკლებადი, არაუარყოფითი ფუნქცია, ისეთი, რომ $\Phi(n) \uparrow \infty$ და

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k^{2-2p}}{\Phi(k)} = \infty.$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$, ისეთი, რომ

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\|\sigma_m f\|_{weak-L_p(G)}^p}{\Phi(m)} = \infty.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავუშვათ, რომ შესრულებულია უტოლობა

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\|\sigma_m f\|_p^p}{m^{2-2p}} \leq c_p \|f\|_{H_p(G)}^p.$$

მაშინ შეფასება (1.7), (1.15)-ის და ლემა 3.2.6-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\|\sigma_m f\|_{H_p(G)}^p}{m^{2-2p}} \tag{3.45}$$
$$\leq \frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\|\sigma_m f\|_p^p}{m^{2-2p}} + \|\widetilde{\sigma}_{\#}^{*} f\|_{H_p(G)} + \|\widetilde{S}_{\#}^{*} f\|_{H_p(G)}$$
$$\leq c_p \|f\|_{H_p(G)}^p .$$

ლემა 2.2.5-ის და (3.45)-ის გამოყენებით თეორემა 3.5.1 დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენეთ, რომ

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\|\sigma_m a\|_p^p}{m^{2-2p}} \leq c < \infty, \quad m = 2, 3, ...$$

ნებისმიერი p-ატომ a-თვის. ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ a არის p-ატომი, რომლის სუპორტიც არის I, $\mu(I) = 2^{-M}$ და $I = I_M$. მაშინ ადვილი სანახავია, რომ $\sigma_n(a) = 0$, როცა $n \leq 2^M$. შებრუნებით, შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ $n > 2^M$.

ვთქვათ $x \in I_M$. მას შემდეგ რაც σ_n არის შემოსაზღვრული $L_\infty(G)$-დან $L_\infty(G)$-ში (შემოსაზღვრულობა გამომდინარეობს ფეიერის გულების თანაბრად შემოსაზღვრულობიდან $L_1(G)$ სივრცეში, რომელიც მოყვანილია ლემა (3.2.1)-ში) და $\|a\|_\infty \leq 2^{M/p}$ ჩვენ დავადგენთ

$$\int_{I_M} |\sigma_m a(x)|^p \, d\mu(x) \leq \|\sigma_m a\|_\infty^p / 2^M$$
$$\leq \|a\|_\infty^p / 2^M \leq c < \infty, \ 0 < p \leq 1/2.$$

ვთქვათ $0 < p \leq 1/2$. მაშინ

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\int_{I_M} |\sigma_m a(x)|^p \, d\mu(x)}{m^{2-2p}}$$

$$\leq \frac{c}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{2-2p}} \leq c < \infty.$$

ადვილი სანახავია

$$|\sigma_m a(x)| \leq \int_{I_M} |a(t)| \, |K_m(x+t)| \, d\mu(t)$$

$$\leq 2^{M/p} \int_{I_M} |K_m(x+t)| \, d\mu(t) .$$

ლემა 3.2.2-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$|\sigma_m a(x)| \leq \frac{c 2^{k+l} 2^{M(1/p-1)}}{m}, \quad x \in I_{l+1}(e_k + e_l), \ 0 \leq k < l < M \tag{3.46}$$

და

$$|\sigma_m a(x)| \leq c 2^{M(1/p-1)} 2^k, \ \ x \in I_M(e_k), \ 0 \leq k < M. \tag{3.47}$$

თუ გამოვიყენებთ (2.1) იგივეობას და (3.46-3.47) შეფასებებს, დავასკვნით

$$\begin{aligned}
&\int_{\overline{I_M}} |\sigma_m a(x)|^p \, d\mu(x) \qquad (3.48)\\
=\ & \sum_{k=0}^{M-2} \sum_{l=k+1}^{M-1} \int_{I_{l+1}(e_k+e_l)} |\sigma_m a(x)|^p \, d\mu(x) \\
& + \sum_{k=0}^{M-1} \int_{I_M(e_k)} |\sigma_m a(x)|^p \, d\mu(x) \\
\leq\ & c \sum_{k=0}^{M-2} \sum_{l=k+1}^{M-1} \frac{1}{2^l} \frac{2^{p(k+l)} 2^{M(1-p)}}{m^p} + c \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{2^M} 2^{M(1-p)} 2^{pk} \\
\leq\ & \frac{c 2^{M(1-p)}}{m^p} \sum_{k=0}^{M-2} \sum_{l=k+1}^{M-1} \frac{2^{p(k+l)}}{2^l} + c \sum_{k=0}^{M-1} \frac{2^{pk}}{2^{pM}} \\
\leq\ & \frac{c 2^{M(1-p)} M^{[1/2+p]}}{m^p} + c.
\end{aligned}$$

აქედან

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\log^{[1/2+p]} n} \sum_{m=2^M+1}^{n} \frac{\int_{\overline{I_M}} |\sigma_m a(x)|^p \, d\mu(x)}{m^{2-2p}} \\
\leq\ & \frac{1}{\log^{[1/2+p]} n} \left(\sum_{m=2^M+1}^{n} \frac{c 2^{M(1-p)} M^{[1/2+p]}}{m^{2-p}} + \sum_{m=2^M+1}^{n} \frac{c}{m^{2-2p}} \right) < c < \infty.
\end{aligned}$$

რაც ასრულებს თეორემა 3.5.1-ის პირველი ნაწილის დამტკიცებას.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა 3.5.1-ის მეორე ნაწილი. ვთქვათ $\Phi(n)$ არის არაუარყოფითი, არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^{(|n_k|+1)(2-2p)}}{\Phi\left(2^{|n_k|+1}\right)} = \infty. \qquad (3.49)$$

(3.49) პირობის გათვალისწინებით, არსებობს ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა $\{\alpha_k : \ k \in \mathbb{N}_+\} \subset \{n_k : \ k \in \mathbb{N}_+\}$ ისეთი, რომ

$$|\alpha_k| \geq 2, \quad \text{სადაც } \ k \in \mathbb{N}_+ \qquad (3.50)$$

და

$$\begin{aligned}
& \sum_{\eta=0}^{\infty} \frac{\Phi^{1/2}\left(2^{|\alpha_\eta|+1}\right)}{2^{|\alpha_\eta|(1-p)}} \qquad (3.51)\\
=\ & 2^{1-p} \sum_{\eta=0}^{\infty} \frac{\Phi^{1/2}\left(2^{|\alpha_\eta|+1}\right)}{2^{(|\alpha_\eta|+1)(1-p)}} < c < \infty.
\end{aligned}$$

ვთქვათ $f=(f_n,\ n\in\mathbb{N}_+)\in H_p(G)$ არის მარტინგალი მაგალითი 2.2.1-დან, სადაც

$$\lambda_k=\frac{\Phi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{2^{(|\alpha_k|)(1/p-1)}}$$

თუ გამოვიყენებთ (2.3) და (3.51) მივიღებთ, რომ $f\in H_p(G)$.
თუ მივმართავთ (2.4)-ს მივიღებთ

$$\begin{aligned}&\widehat{f}(j)\\ =&\left\{\begin{array}{ll}\Phi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right), & \text{თუ } j\in\left\{2^{|\alpha_k|},...,2^{|\alpha_k|+1}-1\right\},\ k\in\mathbb{N}_+,\\ 0\,, & \text{თუ } j\notin\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\left\{2^{|\alpha_k|},...,2^{|\alpha_k|+1}-1\right\}.\end{array}\right.\end{aligned}\tag{3.52}$$

ვთქვათ $2^{|\alpha_k|}<n<2^{|\alpha_k|+1}$. მაშინ

$$\sigma_n f=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{2^{|\alpha_k|}}S_jf+\frac{1}{n}\sum_{j=2^{|\alpha_k|}+1}^{n}S_jf=III+IV.\tag{3.53}$$

ადვილი სანახავია

$$S_jf=0,\quad \text{თუ}\ \ 0\leq j\leq 2^{|\alpha_1|}\tag{3.54}$$

ვთქვათ $2^{|\alpha_s|}<j\leq 2^{|\alpha_s|+1}$, სადაც $s=1,2,...,k$. თუ გამოვიყენებთ (2.6)-ს მივიღებთ

$$\begin{aligned}S_jf\ \ =&\ \ \sum_{\eta=0}^{s-1}\Phi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_\eta|+1}\right)\left(D_{2^{|\alpha_\eta|+1}}-D_{2^{|\alpha_\eta|}}\right)\\ &+\Phi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_s|+1}\right)w_{2^{|\alpha_s|}}D_{j-2^{|\alpha_s|}}.\end{aligned}\tag{3.55}$$

ვთქვათ $2^{|\alpha_s|+1}\leq j\leq 2^{|\alpha_{s+1}|}$, $s=0,1,...k-1$. მაშინ (2.5)-ის გამოყენებით შეგვიძლია მივიღოთ

$$S_jf=\sum_{\eta=0}^{s}\Phi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_\eta|+1}\right)\left(D_{2^{|\alpha_\eta|+1}}-D_{2^{|\alpha_\eta|}}\right).\tag{3.56}$$

ვთქვათ $x\in I_2\left(e_0+e_1\right)$. მას შემდეგ რაც (იხ. ლემები 2.2.2 და 3.2.2)

$$D_{2^n}\left(x\right)=K_{2^n}\left(x\right)=0,\ \text{სადაც}\ n\geq 2,\tag{3.57}$$

(3.50)-ის და (3.54-3.57)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$III=\frac{1}{n}\sum_{\eta=0}^{k-1}\Phi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_\eta|+1}\right)\sum_{v=2^{|\alpha_\eta|}+1}^{2^{|\alpha_\eta|+1}}D_v\left(x\right)\tag{3.58}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{\eta=0}^{k-1}\Phi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_\eta|+1}\right)\left(2^{|\alpha_\eta|+1}K_{2^{|\alpha_\eta|+1}}\left(x\right)-2^{|\alpha_\eta|}K_{2^{|\alpha_\eta|}}\left(x\right)\right)=0.$$

(3.55)-ის გამოყენებით $s=k$-თვის, IV შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$IV = \frac{n-2^{|\alpha_k|}}{n}\sum_{\eta=0}^{k-1}\Phi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_\eta|+1}\right)\left(D_{2^{|\alpha_\eta|+1}}-D_{2^{|\alpha_\eta|}}\right) \tag{3.59}$$

$$+ \frac{\Phi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{n}\sum_{j=2^{|\alpha_k|}+1}^{n} w_{2^{|\alpha_k|}}D_{j-2^{|\alpha_k|}} \tag{3.60}$$

$$= IV_1+IV_2.$$

(3.50)-ის და (3.57)-ის გაერთიანებით მივიღებთ

$$IV_1=0, \text{ სადაც } x\in I_2\left(e_0+e_1\right). \tag{3.61}$$

ვთქვათ $\alpha_k\in\mathbb{A}_{0,2}$, $2^{|\alpha_k|}<n<2^{|\alpha_k|+1}$ და $x\in I_2\left(e_0+e_1\right)$. მას შემდეგ რაც $n-2^{|\alpha_k|}\in\mathbb{A}_{0,2}$ ლემა 2.2.1-ის, და ლემა 3.2.1-ის და (3.57)-ის გამოყენებით დავასკვნით

$$\begin{aligned}|IV_2| &= \frac{\Phi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{n}\left|\sum_{j=1}^{n-2^{|\alpha_k|}}D_j\left(x\right)\right| \\ &= \frac{\Phi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{n}\left|\left(n-2^{|\alpha_k|}\right)K_{n-2^{|\alpha_k|}}\left(x\right)\right| \\ &\geq \frac{\Phi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{2^{|\alpha_k|+1}}.\end{aligned}$$

ვთქვათ $0<p<1/2$ და $n\in\mathbb{A}_{0,2}$. (3.53-3.62) შეფასებების გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}&\|\sigma_n f\|^p_{weak-L_p(G)} \\ \geq\ & \frac{c_p\Phi^{1/2}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{2^{p(|\alpha_k|+1)}}\mu\left\{x\in I_2\left(e_0+e_1\right):\ |\sigma_n f|\geq\frac{c_p\Phi^{1/2p}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{2^{|\alpha_k|+1}}\right\} \\ \geq\ & \frac{c_p\Phi^{1/2}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{2^{p(|\alpha_k|+1)}}\mu\left\{I_2\left(e_0+e_1\right)\right\} \\ \geq\ & \frac{c_p\Phi^{1/2}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}{2^{p(|\alpha_k|+1)}}.\end{aligned} \tag{3.62}$$

აქედან

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|\sigma_n f\|^p_{weak-L_p(G)}}{\Phi\left(n\right)} \\ \geq\ & \sum_{\left\{n\in\mathbb{A}_{0,2}:\ 2^{|\alpha_k|}<n<2^{|\alpha_k|+1}\right\}}\frac{\|\sigma_n f\|^p_{weak-L_p(G)}}{\Phi\left(n\right)} \\ \geq\ & \frac{1}{\Phi^{1/2}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}\sum_{\left\{n\in\mathbb{A}_{0,2}:\ 2^{|\alpha_k|}<n<2^{|\alpha_k|+1}\right\}}\frac{1}{2^{p(|\alpha_k|+1)}} \\ \geq\ & \frac{c_p 2^{(1-p)(|\alpha_k|+1)}}{\Phi^{1/2}\left(2^{|\alpha_k|+1}\right)}\to\infty, \qquad \text{როცა}\quad k\to\infty.\end{aligned}$$

რაც ასრულებს თეორემა 3.5.1-ის დამტკიცებას.

$\square$

თეორემა 3.5.2. *ვთქვათ* $f \in H_{1/2}(G)$. *მაშინ*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_+} \sup_{\|f\|_{H_p}\leq 1} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \|\sigma_m f\|_{1/2}^{1/2} = \infty.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $0 < p \leq 1$ და

$$f_k(x) := 2^k \left(D_{2^{k+1}}(x) - D_{2^k}(x)\right)$$

მას შემდეგ რაც

$$\text{supp}(f_k) = I_k, \quad \int_{I_k} a_k d\mu = 0$$

და

$$\|f_k\|_\infty \leq 2^{2k} = (\text{supp} f_k)^{-2},$$

ჩვენ დავასკვნით, რომ f_k არის 1/2-ატომი.

უფრო მეტიც, თუ გამოვიყენებთ უოლშის სისტემის ორთონორმირებულობას, მივიღებთ

$$\begin{aligned} & S_{2^n}\left(f_k, x\right)) \\ = & \left\{\begin{array}{ll} 0, & n = 0, ..., k, \\ \left(D_{2^{k+1}}(x) - D_{2^k}(x)\right), & n \geq k+1, \end{array}\right. \end{aligned}$$

და

$$\begin{aligned} & \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|S_{2^n}\left(f_k, x\right)\right| \\ = & \left|\left(D_{2^{k+1}}(x) - D_{2^k}(x)\right)\right|, \end{aligned}$$

სადაც $x \in G$.

ლემა 2.2.1-ის პირველი ტოლობის და ლემა 2.2.6-ის გამოყენებით დავასკვნით

$$\begin{aligned} & \|a_k\|_{H_p(G)} \\ = & 2^k \left\|\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|S_{2^n}\left(D_{2^{k+1}}(x) - D_{2^k}(x)\right)\right|\right\|_{1/2} \\ = & 2^k \left\|\left(D_{2^{k+1}}(x) - D_{2^k}(x)\right)\right\|_{1/2} \\ = & 2^k \left\|D_{2^k}(x)\right\|_{1/2} \\ \leq & 2^k \cdot 2^{-k} \leq 1. \end{aligned}$$

ადვილი სანახავია, რომ

$$\widehat{f}_m(i) = \left\{\begin{array}{l} 2^m, \text{ თუ } i = 2^m, ..., 2^{m+1}-1, \\ 0, \text{სხვაგან} \end{array}\right. \tag{3.63}$$

და

$$S_i f_m = \left\{\begin{array}{l} 2^m\left(D_i - D_{2^m}\right), \quad \text{თუ } i = 2^m+1, ..., 2^{m+1}-1, \\ f_m, \quad \text{თუ } i \geq 2^{m+1}, \\ 0, \quad \text{სხვაგან.} \end{array}\right. \tag{3.64}$$

ვთქვათ $0 < n < 2^m$. თუ მივმართავთ ლემა 2.2.1-ის პირველ ტოლობას მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \left|\sigma_{n+2^m} f_m\right| && (3.65) \\ = & \frac{1}{n+2^m}\left|\sum_{j=2^m+1}^{n+2^m} S_j f_m\right| \\ = & \frac{1}{n+2^m}\left|2^m \sum_{j=2^m+1}^{n+2^m}\left(D_j-D_{2^m}\right)\right| \\ = & \frac{1}{n+2^m}\left|2^m \sum_{j=1}^{n}\left(D_{j+2^m}-D_{2^m}\right)\right| \\ = & \frac{1}{n+2^m}\left|2^m \sum_{j=1}^{n} D_j\right| \\ = & \frac{2^m}{n+2^m} n\left|K_n\right| . \end{aligned}$$

ვთქვათ

$$n=\sum_{i=1}^{s} \sum_{k=l_i}^{m_i} 2^k,$$

სადაც

$$0 \leq l_1 \leq m_1 \leq l_2-2<l_2 \leq m_2 \leq \ldots \leq l_s-2<l_s \leq m_s .$$

ლემა 3.2.5-ის და (3.65)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\left|\sigma_{n+2^m} f_m(x)\right| \geq c 2^{2 l_i}, \quad \text{სადაც } \ x \in I_{l_i+1}\left(e_{l_i-1}+e_{l_i}\right) .$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} & \int_G\left|\sigma_{n+2^m} f_m(x)\right|^{1/2} d \mu(x) \\ \geq & \sum_{i=0}^{s} \int_{I_{l_i+1}\left(e_{l_i-1}+e_{l_i}\right)}\left|\sigma_{n+2^m} f_m(x)\right|^{1/2} d \mu(x) \\ \geq & c \sum_{i=0}^{s} \frac{1}{2^{l_i}} 2^{l_i} \\ & \geq c s \geq c V(n) . \end{aligned}$$

აქედან ლემა 2.2.3-ის მეორე შეფასების დახმარებით მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
& \sup_{n\in\mathbb{N}_+}\sup_{\|f\|_{H_p}\leq 1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|\sigma_k f\|_{1/2}^{1/2} \\
\geq & \frac{1}{2^{m+1}}\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}-1}\|\sigma_k f_m\|_{1/2}^{1/2} \\
\geq & \frac{c}{2^{m+1}}\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}-1}V\left(k-2^m\right) \\
\geq & \frac{c}{2^{m+1}}\sum_{k=1}^{2^m-1}V\left(k\right) \\
\geq & c\log m\to\infty,\ \text{როცა}\ \ m\to\infty.
\end{aligned}
$$

რაც ასრულებს თეორემა 3.5.2-ის დამტკიცებას.

$\square$

ორგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების შეჯამებადობა მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე

4.1 განმარტებები და აღნიშვნები

ავღნიშნოთ $\overrightarrow{x}$-ით შემდეგი ორგანზომილებიანი ვექტორი $\overrightarrow{x} := (x^1, x^2)$, ხოლო G^2-ით ორი უოლშის ჯგუფის პირდაპირი ნამრავლი.

ავღნიშნოთ $I_n^2 := I_n(0) \times I_n(0)$ ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$-თვის და $\overline{I_n^2} := G^2 \backslash I_n^2$.

ორგანზომილებიანი $L_p(G^2)$ სივრცის ნორმა (ნახევარნორმა) განიმარტება შემდეგნაირად

$$\|f\|_p := \left(\int_{G^2} |f(\overrightarrow{x})|^p \, d\mu(\overrightarrow{x}) \right)^{1/p} \qquad (0 < p < \infty).$$

ორგანზომილებიანი $weak - L_p(G^2)$ სივრცე შეიცავს ისეთ f ფუნქციებს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{weak-L_p(G^2)} := \sup_{\lambda>0} \lambda \mu \left(\overrightarrow{x} \in G^2 : |f| > \lambda \right)^{1/p} < +\infty.$$

ორგანზომილებიანი უოლშის სისტემა განიმარტება შემდეგნაირად:

$$w_{n_1,n_2}\left(x^1, x^2\right) := w_{n_1}\left(x^1\right) w_{n_2}\left(x^2\right).$$

ორგანზომილებიანი უოლშის სისტემა არის ორთონორმირებული და სრული $L_2(G^2)$-ში (იხ. [30]).

ნებისმიერი $f \in L_1(G^2)$-თვის რიცხვებს

$$\widehat{f}(n_1, n_2) := \int\limits_{G^2} f(\overrightarrow{x}) w_{n_1,n_2}(\overrightarrow{x}) d\mu(\overrightarrow{x})$$

ეწოდება f ფუნქციის (n_1, n_2)-ური ფურიე-უოლშის კოეფიციენტი.

ავღნიშნოთ S_{n_1,n_2}-ით f ფუნქციის (n_1, n_2)-ური მართკუთხოვანი კერძო ჯამები:

$$S_{n_1,n_2}(f; \overrightarrow{x}) := \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \widehat{f}(i_1, i_2) \, w_{i_1,i_2}(\overrightarrow{x}).$$

f ფუნქციის n-ური მარცინკევიჩის (მარცინკევიჩ-ფეიერის) საშუალოები განიმარტება შემდეგნაირად

$$\mathcal{M}_n(f;\overrightarrow{x}) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} S_{k,\dots,k}(f;\overrightarrow{x}).$$

ორგანზომილებიანი დირიხლეს და მარცინკევიჩის გულები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$D_{n_1,n_2}(\overrightarrow{x}) = D_{n_1}\left(x^1\right) D_{n_2}\left(x^2\right).$$

და

$$K_n(\overrightarrow{x}) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} D_{k,k}(\overrightarrow{x}).$$

ორგანზომილებიან ფურიე-უოლშის მწკრივების კერძო ჯამებისთვის ჩვენ შემოვიტანთ შემდეგ აღნიშვნებს

$$S_M^{(1)} f\left(x^1, x^2\right) := \int_G f\left(s, x^2\right) D_M\left(x^1 + s\right) d\mu\left(s\right)$$

და

$$S_N^{(2)} f\left(x^1, x^2\right) := \int_G f\left(x^1, t\right) D_N\left(x^2 + t\right) d\mu\left(t\right).$$

ორგანზომილებიან შემთხვევაში ჩვენ განვმარტავთ დიაგონალური კერძო ჯამების მაქსიმალურ $S_{\#}^{*}$ და შეზღუდულ მაქსიმალურ $\widetilde{S}_{\#}^{*}$ ოპერატორებს შემდეგნაირად

$$S_{\#}^{*}\left(f; x^1, x^2\right) := \sup_{n\in\mathbb{N}_+}\left|S_{n,n}\left(f; x^1, x^2\right)\right|$$

და

$$\widetilde{S}_{\#}^{*}\left(f; x^1, x^2\right) := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|S_{2^n,2^n}\left(f; x_1, x_2\right)\right|.$$

ჩვენ განვმარტავთ მარცინკევიჩის საშუალოების მაქსიმალურ $\mathcal{M}^{*}$ და შეზღუდულ მაქსიმალურ $\widetilde{\mathcal{M}}_{\#}^{*}$ ოპერატორებს შემდეგნაირად

$$\mathcal{M}^{*}\left(f; x^1, x^2\right) := \sup_{n\in\mathbb{N}_+}\left|\mathcal{M}_n\left(f; x_1, x_2\right)\right|$$

და

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\#}^{*}\left(f; x^1, x^2\right) := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\mathcal{M}_{2^n}\left(f; x_1, x_2\right)\right|.$$

ორგანზომილებიან შემთხვევაში ჩვენ ასევე განვიხილავთ შემდეგ წონიან მაქსიმალურ ოპერატორებს

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{*}(f; x_1, x_2) := \sup_{n\in\mathbb{N}_+}\frac{\left|\mathcal{M}_n(f; x_1, x_2)\right|}{\log^{3/2}\left(n+1\right)}$$

და

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{*,p}\left(f; x_1, x_2\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}_+}\left|\frac{\mathcal{M}_n(f; x_1, x_2)}{(n+1)^{2/p-3}}\right|.$$

σ-ალგებრა განსაზღვრული ორგანზომილებიანი ინტერვალებით

$$I_n^2(\overrightarrow{x}) := I_n\left(x^1\right)\times I_n\left(x^2\right),$$

რომელთა ზომაც არის $2^{-n}\times 2^{-n}$ ავღნიშნოთ $F_n\,(n\in\mathbb{N})$-ით.

პირობითი მათემატიკური ლოდინი F_n $(n \in \mathbb{N})$ ნაკადის მიმართ ავღნიშნოთ E_n-ით და ის ჩვენ კონკრეტულ შემთხვევაში გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}E_n f(\overrightarrow{x}) &= S_{2^n,2^n} f\left(\overrightarrow{x}\right) \\ &= \sum_{k_1=0}^{2^n-1}\sum_{k_2=0}^{2^n-1} \widehat{f}\left(k_1,k_2\right) w_{k_1,k_2}(\overrightarrow{x}) \\ &= \frac{1}{\left|I_n^2\left(\overrightarrow{x}\right)\right|}\int_{I_n^2(\overrightarrow{x})} f(\overrightarrow{x})d\mu(\overrightarrow{x}),\end{aligned}$$

სადაც $\left|I_n^2\left(\overrightarrow{x}\right)\right| = 2^{-2n}$ აღნიშნავს $I_n^2\left(\overrightarrow{x}\right)$ ინტერვალის სიგრძეს.

$f_n \in L_1\left(G^2\right)$ ფუნქციების $f = \left(f_n,\ n \in \mathbb{N}\right)$ მიმდევრობას ეწოდება ორობითი მარტინგალი თუ აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას (დეტალებისთვის იხ. [30])

(i) f_n არის ზომადი F_n $\sigma-$ალგებრის მიმართ, ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$-თვის,

(ii) $E_n f_m = f_n$ ნებისმიერი $n \leq m$-თვის.

f მარტინგალის მაქსიმალური ფუნქცია განიმარტება შემდეგნაირად

$$f^* = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|f_n\right|.$$

იმ შემთხვევაში, თუ $f \in L_1\left(G^2\right)$, მაშინ როგორც ცნობილია, მისი მაქსიმალური ფუნქცია განინარტება შემდეგნაირად:

$$f^*\left(\overrightarrow{x}\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\mu\left(I_n^2\left(\overrightarrow{x}\right)\right)}\left|\int\limits_{I_n^2(\overrightarrow{x})} f\left(\overrightarrow{u}\right)d\mu\left(\overrightarrow{u}\right)\right|.$$

$0 < p < \infty$-თვის ერთპარამეტრიანი ჰარდის მარტინგალური სივრცე $H_p\left(G^2\right)$ შეიცავს ყველა მარტინგალს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{H_p(G^2)} := \|f^*\|_p < \infty.$$

შემდეგ ჩვენ მოვიყვანთ p-ატომების განმარტებას, რომელიც ძალიან მნიშვნელოვანია ჰარდის სივრცეების დახასიათებისთვის.

შემოსაზღვრულ ზომად ფუნქცია a-ს ეწოდება p-ატომი, თუ არსებობს ორობითი ორგანზომილებიანი ინტერვალი I^2, ისეთი, რომ

$$\begin{cases} a) & \int_{I^2} a d\mu = 0, \\ b) & \|a\|_\infty \leq \mu\left(I^2\right)^{-1/p}, \\ c) & \operatorname{supp}(a) \subset I^2. \end{cases}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ყოველი $f = \left(f_n, n \in \mathbb{N}\right)$ მარტინგალისთვის და ყოველი $\left(k_1,k_2\right) \in \mathbb{N}^2$-თვის არსებობს ზღვარი

$$\widehat{f}\left(k_1,k_2\right) := \lim_{n_1,n_2\to\infty}\int_{G^2} f_{n_1,n_2}\left(\overrightarrow{x}\right) w_{k_1,k_2}\left(\overrightarrow{x}\right) d\mu\left(\overrightarrow{x}\right)$$

და მას ეწოდება f მარტინგალის $\left(k_1,k_2\right)$-ური ფურიე-უოლშის კოეფიციენტი.

თუ $f \in L_1\left(G^2\right)$ და $\left(E_n f : n \in \mathbb{N}\right)$ არის რეგულარული მარტინგალი, მაშინ

$$\begin{aligned}\widehat{f}\left(k_1,k_2\right) &= \int_{G^2} f\left(\overrightarrow{x}\right) w_{k_1,k_2}(\overrightarrow{x}) d\mu\left(\overrightarrow{x}\right) \\ &= \widehat{f}\left(k_1,k_2\right),\ k_1,k_2 \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

ორგანზომილებიანი უწყვეტობის მოდული $H_p(G^2)$ სივრცეში განიმარტება შემდეგნაირად

$$\omega_{H_p(G^2)}\left(\frac{1}{2^n}, f\right) := \|f - S_{2^n,2^n} f\|_{H_p(G^2)} .$$

ჩვენ გვჭირდება ავღწეროთ რას ნიშნავს სხვაობა $f - S_{2^n,2^n} f$ სადაც f არის მარტინგალი და $S_{2^n,2^n} f$ არის ფუნქცია. ჩვენ ავხნით თუ როგორ შეიძლება გავიგოთ ეს სხვაობა შემდეგ შენიშვნაში:

შენიშვნა 4.1.1: ვთქვათ $0 < p \le 1$. მას შემდეგ რაც

$$S_{2^n,2^n} f = f^{(n)} \in L_1(G^2), \text{ სადაც } f = \left(f^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right) \in H_p(G^2)$$

ამიტომ შეგვიძლია განვიხილოთ მისით წარმოქმნილი მარტინგალი:

$$\begin{aligned} & \left(S_{2^k,2^k} f^{(n)} : k \in \mathbb{N}\right) \\ = & \left(S_{2^k,2^k} S_{2^n,2^n}, k \in \mathbb{N}\right) \\ = & \left(S_{2^0,2^0} f, \ldots, S_{2^{n-1},2^{n-1}} f, S_{2^n,2^n} f, S_{2^n,2^n} f, \ldots\right) \\ = & \left(f^{(0)}, \ldots, f^{(n-1)}, f^{(n)}, f^{(n)}, \ldots\right) \end{aligned}$$

საიდანაც $f - S_{2^n,2^n} f$ სხვაობის ქვეშ ვგულისხმობთ შემდეგ მარტინგალს:

$$f := \left((f - S_{2^n,2^n} f)^{(k)}, \ \ k \in \mathbb{N}\right)$$

სადაც

$$(f - S_{2^n,2^n} f)^{(k)} = \begin{cases} 0, & k = 0, \ldots, n, \\ f^{(k)} - f^{(n)}, & k \ge n + 1, \end{cases}$$

და შესაბამისად

$$\|f - S_{2^n,2^n} f\|_{H_p(G^2)}$$

ნორმის ქვეშ გვესმის სწორედ

$$f - S_{2^n,2^n} f = \left((f - S_{2^n,2^n} f)^{(k)}, \ \ k \in \mathbb{N}\right)$$

მარტინგალის $H_p(G^2)$ ნორმა.

4.2 დამხმარე დებულებები

შემდეგ ლემებში ჩამოვაყალიბებთ ორგანზომილებიან მარცინკევიჩის გულების შეფასებებს (იხ. ლემა 4.2.1-ლემა 4.2.4).

გლუკნოვმა [6]-ში დაამტკიცა, რომ სამართლიანია შემდეგი:

ლემა 4.2.1. *არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c ისეთი, რომ სამართლიანია შემდეგი შეფასება:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{G^2} |K_n(x^1, x^2)| d\mu(x^1, x^2) \le c.$$

შემდეგი ლემა დამტკიცებულია [16]-ში გოგინავას მიერ:

ლემა 4.2.2. *ვთქვათ* $n \geq 2^N$, $(x^1,x^2) \in (I_{l^1} \backslash I_{l^1+1}) \times (I_{m^2} \backslash I_{m^2+1})$ *და* $0 \leq l^1 \leq m^2 < N$. *მაშინ*

$$\int_{I_N \times I_N} |K_n(x^1+t^1, x^2+t^2)| d\mu(t^1,t^2)$$

$$\leq \frac{c}{n2^{2N}} \left\{ 2^{l^1-m^2} \sum_{r^1=l^1+1}^{m^2+1} 2^{r^1} D_{2^{m^2+1}}(x^1+e_{l^1}+e_{r^1}) \sum_{s=m^2+1}^{N} D_{2^s}(x^2+e_{m^2}+x^1_{m^2+1,s-1}) \right.$$

$$\left. +2^{l^1+m^2} \sum_{s=l^1}^{m^2} \sum_{r^1=l^1+1}^{s} D_{2^s}(x^1+e_{l^1}+e_{r^1}) \right\},$$

სადაც

$$x_{i,j} := \sum_{s=i}^{j} x_s e_s, \quad (x_{i,i-1} = 0).$$

ჩვენი ძირითადი თეორემების დამტკიცებისას დაგვჭირდება გოგინავას [16] მიერ დამტკიცებული შემდეგი ლემა:

ლემა 4.2.3. *ვთქვათ* $(x^1,x^2) \in I_N \times (I_{m^2} \backslash I_{m^2+1})$ *და* $0 \leq m^2 < N$. *მაშინ*

$$\int_{I_N \times I_N} |K_n(x^1+t^1, x^2+t^2)| d\mu(t^1,t^2)$$

$$\leq c \frac{2^{m^2}}{n2^N} \sum_{s=m^2}^{N-1} D_{2^s}(x^2+e_{m^2}), \text{ სადაც } n > 2^N.$$

ჩვენ ასევე დაგვჭირდება გოგინავას [11] მიერ დამტკიცებული შემდეგი ლემა:

ლემა 4.2.4. *ვთქვათ*

$$x^1 \in I_{4A}\left(0,...,0,x^1_{4m}=1,0,...,0,x^1_{4l}=1,x^1_{4l+1},...,x^1_{4A-1}\right)$$

და

$$x^2 \in I_{4A}\left(0,...,0,x^2_{4l}=1,x^1_{4l+1}...,x^1_{4q-1},1-x^1_{4q},x^2_{4q+1},...,x^2_{4A-1}\right).$$

მაშინ

$$n_{A-1}\left|K_{n_{A-1}}\left(x^1,x^2\right)\right| \geq 2^{4q+4l+4m-3},$$

სადაც

$$n_A = 2^{4A}+2^{4A-4}+...+2^4+2^0.$$

ჰარდის მარტინგალური სივრცე $H_p(G^2)$ ნებისმიერი $0 < p \leq 1$-თვის შეიძლება დახასიათდეს p-ატომების დახმარებით. სამართლიანია შემდეგი (დეტალებისთვის იხ. [33], [51] და [52]):

ლემა 4.2.5. *მარტინგალი* $f = (f_n,\ n \in \mathbb{N})$ *ეკუთვნის* $H_p(G^2)\,(0 < p \leq 1)$ *მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს p-ატომების მიმდევრობა* $(a_k,\ k \in \mathbb{N})$ *და ნამდვილი რიცხვების მიმდევრობა* $(\mu_k,\ k \in \mathbb{N})$ *ისეთი, რომ ყოველი* $n \in \mathbb{N}$*-თვის*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k S_{2^n,2^n} a_k = f_n \qquad (4.1)$$

და

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\mu_k|^p<\infty,$$

უფრო მეტიც,

$$\|f\|_{H_p(G^2)}\backsim\inf\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\mu_k|^p\right)^{1/p},$$

სადაც ინფიმუმი აღებულია f-ის ყოველ წარმოდგენებს შორის, რომელსაც აქვს (4.1) სახე.

ლემა 4.2.6. *ვთქვათ $0<p\leq 1$ და T არის σ-სუბწრფივი ოპერატორი, ისეთი, რომ ნებისმიერი p-ატომ a-თვის*

$$\int\limits_{G^2}|Ta(\overrightarrow{x})|^p\,d\mu(\overrightarrow{x})\leq c_p<\infty,$$

მაშინ

$$\|Tf\|_p\leq c_p\,\|f\|_{H_p(G)}\,. \tag{4.2}$$

თუ დამატებით T შემოსაზღვრულია $L_\infty(G^2)$-დან $L_\infty(G^2)$-ში, მაშინ (4.2)-ის დასამტკიცებლად საკმარისია, რომ ნებისმიერი p-ატომ a-სთვის შემოწმდეს

$$\int\limits_{\overline{I^2}}|Ta\,(\overrightarrow{x})|^p\,d\mu\,(\overrightarrow{x})\leq c_p<\infty,$$

სადაც I^2 აღნიშნავს a ატომის სუპორტს და $\overline{I^2}:=G^2\backslash I^2$.

კერძო შემთხვევებში არსებობს ჰარდის სივრცის ნორმის დათვლის უფრო მარტივი საშუალებები (დეტალებისთვის იხ. [33], [51] და [52]):

ლემა 4.2.7. *თუ $g\in L_1\left(G^2\right)$ და $f:=(E_ng:n\in\mathbb{N})$ არის რეგულარული მარტინგალი, მაშინ $H_p\left(G^2\right)$ $(0<p\leq 1)$ ნორმა გამოითვლება შემდეგნაირად*

$$\|f\|_{H_p(G^2)}=\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}|S_{2^n,2^n}g|\right\|_p.$$

ლემა 4.2.8-ში და ლემა 4.2.9-ში დამტკიცებული შეფასებები მოყვანილია სტატიებში [23], [24], [48].

ლემა 4.2.8. *ვთქვათ $0<p\leq 1$, $2^k\leq n<2^{k+1}$ და $S_{n,n}f$ არის უოლშის სისტემის (n,n)-ური კერძო ჯამი, სადაც $f\in H_p(G^2)$. მაშინ ნებისმიერი ფიქსირებული $n\in\mathbb{N}$-თვის*

$$\begin{aligned}&\|S_{n,n}f\|_{H_p(G^2)}\\ &\leq\left\|\sup_{0\leq l\leq k}\left|S_{2^l,2^l}f\right|\right\|_p+\|S_{n,n}f\|_p\\ &\leq\left\|\widetilde{S}_{\#}^{*}f\right\|_p+\|S_{n,n}f\|_p\,.\end{aligned}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ჩვენ განვიხილავთ შემდეგ მარტინგალს

$$f_{\#} := \left(S_{2^k,2^k}S_{n,n}f,\ k \in \mathbb{N}_+\right)$$

$$= \left(S_{2^0,2^0}, S_{2^k,2^k}f, ...,\ S_{n,n}f, ..., S_{n,n}f, ...\right),$$

რასაც ლემა 4.2.7-ის დახმარებით დაუყოვნებლივ მოყვება

$$\begin{aligned}
&\|S_{n,n}f\|^p_{H_p(G^2)} \\
&\leq \left\|\sup_{0\leq l\leq k}\left|S_{2^l,2^l}f\right|\right\|^p_p + \|S_{n,n}f\|^p_p \\
&\leq \left\|\widetilde{S}^*_{\#}f\right\|^p_p + \|S_{n,n}f\|^p_p.
\end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

□

ლემა 4.2.9. *ვთქვათ* $0 < p \leq 1$, $2^k \leq n < 2^{k+1}$ *და* $\mathcal{M}_n f$ *არის უოლშის სისტემის მიმართ* n*-ური მარცინკევიჩის საშუალო, სადაც* $f \in H_p(G^2)$. *მაშინ ნებისმიერი ფიქსირებული* $n \in \mathbb{N}$*-თვის*

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{M}_n f\|^p_{H_p(G^2)} \\
&\leq \left\|\sup_{0\leq l\leq k}|\mathcal{M}_{2^l}f|\right\|^p_p + \left\|\sup_{0\leq l\leq k}|S_{2^l}f|\right\|^p_p + \|\mathcal{M}_n f\|^p_p \\
&\leq \left\|\widetilde{\mathcal{M}}^*_{\#}f\right\|^p_p + \left\|\widetilde{S}^*_{\#}f\right\|^p_p + \|\mathcal{M}_n f\|^p_p.
\end{aligned}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ შემდეგი მარტინგალი

$$f_{\#} = (S_{2^k}\mathcal{M}_n f,\ k \in \mathbb{N})$$

$$= \left(\frac{2^0\mathcal{M}_{2^0}}{n} + \frac{(n-2^0)S_{2^0}f}{n}, ..., \frac{2^k\mathcal{M}_{2^k}f}{n} + \frac{(n-2^k)S_{2^k}f}{n}, \mathcal{M}_n f, ..., \mathcal{M}_n f, ...\right).$$

რასაც ლემა 4.2.7-ის დახმარებით დაუყოვნებლივ მოყვება

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{M}_n f\|^p_{H_p(G^2)} \\
&\leq \left\|\sup_{0\leq l\leq k}|\mathcal{M}_{2^l}f|\right\|^p_p + \left\|\sup_{0\leq l\leq k}\left|S_{2^l,2^l}f\right|\right\|^p_p + \|S_{n,n}f\|^p_p \\
&\leq \left\|\widetilde{\mathcal{M}}^*_{\#}f\right\|^p_p + \left\|\widetilde{S}^*_{\#}f\right\|^p_p + \|\mathcal{M}_n f\|^p_p.
\end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

□

4.3 ორგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების კერძო ჯამების ძლიერად შეჯამებადობა მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე

ამ თავში შესწავლილი იქნება ორგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების კერძო ჯამების ძლიერად შეჯამებადობის თეორემები, როცა $0 < p \leq 1$ (დეტალებისთვის იხ. [48]).

სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა 4.3.1. *ა) ვთქვათ $0 < p < 1$ და $f \in H_p(G^2)$. მაშინ*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|S_{n,n}f\|_{H_p(G^2)}^p}{n^{3-2p}} \leq c_p \|f\|_{H_p(G^2)}^p .$$

ბ) ვთქვათ $0 < p < 1$ და $\Phi : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ არის არაუარყოფითი, არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(n) = +\infty. \tag{4.3}$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G^2)$, ისეთი, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|S_{n,n}f\|_{weak-L_p(G^2)}^p \Phi(n)}{n^{3-2p}} = \infty.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ დავუშვებთ, რომ უკვე დამტკიცებულია პირობა:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|S_{n,n}f\|_p^p}{n^{3-2p}} \leq c_p \|f\|_{H_p(G^2)}^p .$$

ლემა 2.2.7-ის და უტოლობა (1.18)-ის დახმარებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|S_{n,n}f\|_{H_p(G^2)}^p}{n^{3-2p}} \\ \leq \ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|S_{n,n}f\|_p^p}{n^{3-2p}} + \left\|\widetilde{S}_{\#}^{*} f\right\|_p^p \\ \leq \ & \|f\|_{H_p(G^2)}^p . \end{aligned}$$

თუ გამოვიყენებთ ლემა 4.2.6-ს, ჩვენ მხოლოდ მოგვიწევს, რომ ვაჩვენოთ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|S_{n,n}a\|_p^p}{n^{3-2p}} \leq c_p < \infty, \tag{4.4}$$

ნებისმიერი p-ატომ a-თვის.

ვთქვათ a არის p-ატომი, რომელსაც აქვს სუპორტი $I_N(z^1) \times I_N(z^2)$-ში, სადაც $\mu(I_N) = \mu(I_N) = 2^{-N}$. ზოგადობის შეუზღუდავად ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $z^1 = z^2 = 0$.

ვთქვათ $(x^1,x^2)\in\overline{I}_N\times\overline{I}_N$. ამ შემთხვევაში

$$D_{2^i}\left(x^1+t^1\right)1_{I_N}\left(t^1\right)=0,\ \ \text{როცა}\ \ i\geq N$$

და

$$D_{2^i}\left(x^2+t^2\right)1_{I_N}\left(t^2\right)=0,\ \ \text{როცა}\ \ i\geq N.$$

თუ გამოვიყენებთ $w_{2^j}\left(x^i+t^i\right)=w_{2^j}\left(x^i\right),$ სადაც $t^i\in I_N$, $i=1\vee 2$ და $j<N$, ლემა 2.2.2-ის ორივე ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
&S_{n,n}a\left(x^1,x^2\right)\\
=&\int\limits_{G\times G}a\left(t^1,t^2\right)D_n\left(x^1+t^1\right)D_n\left(x^2+t^2\right)d\mu\left(t^1,t^2\right)\\
=&\int\limits_{I_N\times I_N}a\left(t^1,t^2\right)D_n\left(x^1+t^1\right)D_n\left(x^2+t^2\right)d\mu\left(t^1,t^2\right)\\
=&\int\limits_{I_N\times I_N}a\left(t^1,t^2\right)w_n\left(x^1+t^1+x^2+t^2\right)\sum_{i=0}^{N-1}n_iw_{2^i}\left(x^1+t^1\right)D_{2^i}\left(x^1+t^1\right)\\
&\times\sum_{j=0}^{N-1}n_jw_{2^j}\left(x^2+t^2\right)D_{2^j}\left(x^2+t^2\right)d\mu\left(t^1,t^2\right)\\
=&\ w_n\left(x^1\right)\sum_{i=0}^{N-1}n_iw_{2^i}\left(x^2\right)D_{2^i}\left(x^1\right)w_n\left(x^2\right)\sum_{j=0}^{N-1}n_jw_{2^j}\left(x^2\right)D_{2^j}\left(x^2\right)\\
&\times\int\limits_{I_N\times I_N}a\left(t^1,t^2\right)w_n\left(t^1+t^2\right)d\mu\left(t^1,t^2\right)\\
=&\ w_n\left(x^1+x^2\right)\sum_{i=0}^{N-1}n_iw_{2^i}\left(x^1\right)D_{2^i}\left(x^1\right)\sum_{j=0}^{N-1}n_jw_{2^j}\left(x^2\right)D_{2^j}\left(x^2\right)\\
&\times\int\limits_{I_N}\left(\int\limits_{I_N}a\left(t^2+\tau,t^2\right)d\mu\left(t^2\right)\right)w_n\left(\tau\right)d\mu\left(\tau\right)\\
=&\ w_n\left(x^1+x^2\right)\sum_{i=0}^{N-1}n_iw_{2^i}\left(x^1\right)D_{2^i}\left(x^1\right)\sum_{j=0}^{N-1}n_jw_{2^j}\left(x^2\right)D_{2^j}\left(x^2\right)\int\limits_{I_N}\Phi\left(\tau\right)w_n\left(\tau\right)d\mu\left(\tau\right)\\
=&\ w_n\left(x^1+x^2\right)\sum_{i=0}^{N-1}n_iw_{2^i}\left(x^1\right)D_{2^i}\left(x^1\right)\sum_{j=0}^{N-1}n_jw_{2^j}\left(x^2\right)D_{2^j}\left(x^2\right)\widehat{\Phi}\left(n\right),
\end{aligned}$$

სადაც

$$\Phi\left(\tau\right)=\int\limits_{I_N}a\left(t^i+\tau,t^i\right)d\mu\left(t^i\right)\ \ \text{და}\ \ i=1\vee 2.$$

ვთქვათ $x\in I_s\backslash I_{s+1}$, სადაც $i=1\vee 2$.მაშინ ლემა 2.2.2-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\sum_{i=0}^{N-1}D_{2^i}\left(x\right)\leq c2^s.$$

(2.1)-ის დახმარებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} & \int_{\overline{I}_N}\left(\sum_{i=0}^{N-1} D_{2^i}(x)\right)^p d\mu(x) \\ \leq & \; c_p \sum_{s=0}^{N-1} \int_{I_s \setminus I_{s+1}} 2^{ps} d\mu(x) \\ \leq & \; c_p \sum_{s=0}^{\infty} 2^{(p-1)s} \\ < & \; c_p < \infty, \qquad 0 < p < 1. \end{aligned} \tag{4.5}$$

(4.5)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-2p}} \int\limits_{\overline{I}_N \times \overline{I}_N} \left|S_{n,n} a\left(x^1, x^2\right)\right|^p d\mu\left(x^1, x^2\right) \\ \leq & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\widehat{\Phi}(n)\right|^p}{n^{3-2p}} \int\limits_{\overline{I}_N}\left(\sum_{i=0}^{N-1} D_{2^i}\left(x^1\right)\right)^p d\mu\left(x^1\right) \int\limits_{\overline{I}_N}\left(\sum_{i=0}^{N-1} D_{2^i}\left(x^2\right)\right)^p d\mu\left(x^2\right) \\ \leq & \; c_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\widehat{\Phi}(n)\right|^p}{n^{3-2p}}. \end{aligned}$$

ვთქვათ $n < 2^N$. მას შემდეგ რაც $w_n(\tau) = 1$, სადაც $\tau \in I_N$ მივიღებთ

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}(n) &= \int\limits_{I_N} \Phi(\tau) w_n(\tau) d\mu(\tau) \\ &= \int\limits_{I_N}\left(\int\limits_{I_N} a\left(t^2+\tau, t^2\right) d\mu\left(t^2\right)\right) w_n(\tau) d\mu(\tau) \\ &= \int\limits_{I_N \times I_N} a\left(t^1, t^2\right) d\mu\left(t^1, t^2\right) = 0. \end{aligned}$$

ამიტომ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $n \geq 2^N$. თუ მივმართავთ ჰელდერის უტოლობას

შეგვიძლია დავწეროთ

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\widehat{\Phi}\left(n\right)\right|^{p}}{n^{3-2p}} \qquad (4.6)\\
\leq\ & \left(\sum_{n=2^{N}}^{\infty}\left|\widehat{\Phi}\left(n\right)\right|^{2}\right)^{p/2}\left(\sum_{n=2^{N}}^{\infty}\frac{1}{n^{(3-2p)\cdot(2/(2-p))}}\right)^{(2-p)/2}\\
\leq\ & \left(\frac{1}{2^{N(2(3-2p)/(2-p)-1)}}\right)^{(2-p)/2}\left(\int_{G}\left|\Phi\left(\tau\right)\right|^{2}d\mu\left(\tau\right)\right)^{p/2}\\
\leq\ & \frac{c_{p}}{2^{N(4-3p)/2}}\left(\int_{I_{N}}\left|\int_{I_{N}}a\left(t^{2}+\tau,t^{2}\right)d\mu\left(t\right)\right|^{2}d\mu\left(\tau\right)\right)^{p/2}\\
\leq\ & \frac{c_{p}}{2^{N(4-3p)/2}}\left\Vert a\right\Vert_{\infty}^{p}\frac{1}{2^{Np/2}}\frac{1}{2^{Np}}\\
\leq\ & \frac{c_{p}}{2^{N(4-3p)/2}}2^{2N}\frac{1}{2^{3pN/2}}<c_{p}<\infty.
\end{aligned}
$$

ვთქვათ $(x^1,x^2)\in\overline{I}_N\times I_N$. მაშინ მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
&S_{n,n}a\left(x^{1},x^{2}\right)\\
=\ & w_{n}\left(x^{1}\right)\sum_{j=0}^{N-1}n_{j}w_{2^{j}}\left(x^{1}\right)D_{2^{j}}\left(x^{1}\right)\\
&\times\int_{G\times G}a\left(t^{1},t^{2}\right)w_{n}\left(t^{1}\right)D_{n}\left(x^{2}+t^{2}\right)d\mu\left(t^{1},t^{2}\right)\\
=\ & w_{n}\left(x^{1}\right)\sum_{j=0}^{N-1}n_{j}w_{2^{j}}\left(x^{1}\right)D_{2^{j}}\left(x^{1}\right)\int_{G}S_{n}^{(2)}a\left(t^{1},x^{2}\right)w_{n}\left(t^{1}\right)d\mu\left(t^{1}\right)\\
=\ & w_{n}\left(x^{1}\right)\sum_{j=0}^{N-1}n_{j}w_{2^{j}}\left(x^{1}\right)D_{2^{j}}\left(x^{1}\right)\widehat{S}_{n}^{(2)}a\left(n,x^{2}\right).
\end{aligned}
$$

(4.5)-ის გამოყენება მოგვცემს

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3-2p}}\int_{\overline{I}_{N}\times I_{N}}\left|S_{n,n}a\left(x^{1},x^{2}\right)\right|^{p}d\mu\left(x^{1},x^{2}\right)\\
\leq\ & \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3-2p}}\int_{\overline{I}_{N}\times I_{N}}\left(\sum_{j=0}^{N-1}D_{2^{j}}\left(x^{1}\right)\left|\widehat{S}_{n}^{(2)}a\left(n,x^{2}\right)\right|\right)^{p}d\mu\left(x^{1},x^{2}\right)\\
\leq\ & \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3-2p}}\int_{\overline{I}_{N}}\left(\sum_{i=0}^{N-1}D_{2^{i}}\left(x^{1}\right)\right)^{p}d\mu\left(x^{1}\right)\cdot\int_{I_{N}}\left|\widehat{S}_{n}^{(2)}a\left(n,x^{2}\right)\right|^{p}d\mu\left(x^{2}\right)\\
\leq\ & \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3-2p}}\int_{I_{N}}\left|\widehat{S}_{n}^{(2)}a\left(n,x^{2}\right)\right|^{p}d\mu\left(x^{2}\right).
\end{aligned}
$$

ვთქვათ $n < 2^N$. მაშინ p-ატომის განმარტებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_n^{(2)} a\left(n, x^2\right) &= \int\limits_G \left(\int\limits_G a\left(t^1, t^2\right) D_n\left(x^2 + t^2\right) d\mu\left(t^2\right) \right) w_n\left(t^1\right) d\mu\left(t^1\right) \\
&= D_n\left(x^2\right) \int\limits_{I_N \times I_N} a\left(t^1, t^2\right) d\mu\left(t^1, t^2\right) = 0.
\end{aligned}$$

შებრუნებით, ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $n \geq 2^N$. შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-2p}} \int\limits_{\overline{I}_N \times I_N} \left|S_{n,n} a\left(x^1, x^2\right)\right|^p d\mu\left(x^1, x^2\right) \\
\leq &\sum_{n=2^N}^{\infty} \frac{1}{n^{3-2p}} \int\limits_{I_N} \left|\widehat{S}_n^{(2)} a\left(n, x^2\right)\right|^p d\mu\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

მას შემდეგ რაც

$$\left\|S_n^{(2)} a\left(n, x^2\right)\right\|_2 \leq c \left\|a\right\|_2$$

თუ გამოვიყენებთ ისევ ჰელდერის უტოლობას მივიღებთ

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{I_N} \left|\widehat{S}_n^{(2)} a\left(n, x^2\right)\right|^p d\mu\left(x^2\right) \\
\leq &\frac{c_p}{2^{N(1-p)}} \left(\int\limits_{I_N} \left|\widehat{S}_n^{(2)} a\left(n, x^2\right)\right| d\mu\left(x^2\right) \right)^p \\
= &\frac{c_p}{2^{N(1-p)}} \left(\int\limits_{I_N} \left| \int\limits_{I_N} S_n^{(2)} a\left(t^1, x^2\right) w_n\left(t^1\right) d\mu\left(t^1\right) \right| d\mu\left(x^2\right) \right)^p \\
= &\frac{c_p}{2^{N(1-p)}} \left(\int\limits_{I_N} \left| \int\limits_{I_N} \left(\int\limits_{I_N} a\left(t^1, t^2\right) D_n\left(x^2 + t^2\right) d\mu\left(t^2\right) \right) w_n\left(t^1\right) d\mu\left(t^1\right) \right| d\mu\left(x^2\right) \right)^p \\
\leq &\frac{c_p}{2^{N(1-p)}} \left(\int\limits_{I_N} \left(\int\limits_{I_N} \left| \int\limits_{I_N} a\left(t^1, t^2\right) D_n\left(x^2 + t^2\right) d\mu\left(t^2\right) \right| d\mu\left(x^2\right) \right) d\mu\left(t^1\right) \right)^p \\
\leq &\frac{c_p}{2^{N(1-p)}} \left(\frac{1}{2^{N/2}} \int\limits_{I_N} \left(\int\limits_{I_N} \left| \int\limits_{I_N} a\left(t^1, t^2\right) D_n\left(x^2 + t^2\right) d\mu\left(t^2\right) \right|^2 d\mu\left(x^2\right) \right)^{1/2} d\mu\left(t^1\right) \right)^p \\
\leq &\frac{c_p}{2^{N(1-p)}} \left(\frac{1}{2^{N/2}} \int\limits_{I_N} \left(\int\limits_{I_N} \left|a\left(t^1, t^2\right)\right|^2 d\mu\left(t^2\right) \right)^{1/2} d\mu\left(t^1\right) \right)^p \\
\leq &\frac{c_p}{2^{N(1-p)}} \left(\frac{\left\|a\right\|_\infty}{2^{N/2}} \frac{1}{2^N} \frac{1}{2^{N/2}} \right)^p \leq \frac{c_p}{2^{N(1-p)}} \left(\frac{2^{2N/p}}{2^{2N}} \right)^p \leq c_p 2^{N(1-p)}.
\end{aligned}$$

საიდანაც

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3-2p}}\int\limits_{\overline{I}_N\times I_N}\left|S_{n,n}a\left(x^1,x^2\right)\right|^p d\mu\left(x^1,x^2\right) \tag{4.7}$$
$$\leq c_p\sum_{n=2^N}^{\infty}\frac{1}{n^{3-2p}}2^{N(1-p)}$$
$$\leq \frac{c_p}{2^{N(1-p)}}\leq c_p<\infty.$$

ანალოგიურად შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3-2p}}\int\limits_{I_N\times\overline{I}_N}\left|S_{n,n}a\left(x^1,x^2\right)\right|^p d\mu\left(x^1,x^2\right)\leq c_p<\infty. \tag{4.8}$$

ვთქვათ $(x^1,x^2)\in I_N\times I_N$. მაშინ p-ატომის განმარტების ძალით მივიღებთ

$$\int\limits_{I_N\times I_N}\left|S_{n,n}a\left(x^1,x^2\right)\right|^p d\mu\left(x^1,x^2\right)$$
$$\leq \frac{1}{2^{N(2-p)}}\left(\int\limits_{I_N\times I_N}\left|S_{n,n}a\left(x^1,x^2\right)\right|^2 d\mu\left(x^1,x^2\right)\right)^{p/2}$$
$$\leq \frac{1}{2^{N(2-p)}}\left(\int\limits_{I_N\times I_N}\left|a\left(x^1,x^2\right)\right|^2 d\mu\left(x^1,x^2\right)\right)^{p/2}$$
$$\leq \frac{\|a\|_\infty^p}{2^{N(2-p)}}\frac{1}{2^{Np}}$$
$$\leq c_p\frac{1}{2^{N(2-p)}}2^{2N}\frac{1}{2^{Np}}\leq c_p<\infty.$$

რასაც მოყვება

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3-2p}}\int\limits_{I_N\times I_N}\left|S_{n,n}a\left(x^1,x^2\right)\right| d\mu\left(x^1,x^2\right) \tag{4.9}$$
$$\leq c_p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3-2p}}\leq c_p<\infty.$$

(4.4-4.9)-ის გაერთიანებით მივიღებთ თეორემა 4.3.1-ის დამტკიცებას.

ვთქვათ $0<p<1$ და $\Phi\left(n\right)$ აკმაყოფილებს 4.3 პირობას. მაშინ არსებობს ნატურალური რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა $\{\alpha_k:\ k\in\mathbb{N}_+\}$ ისეთი, რომ:

$$\alpha_0\geq 2$$

და

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Phi^{-p/4}\left(2^{2\alpha_k}\right)<\infty. \tag{4.10}$$

ვთქვათ $f=(f_n,\ n\in\mathbb{N}_+)$ არის მარტინგალი მაგალითი 3.3.4-დან, სადაც

$$\lambda_k=\Phi^{-1/4}\left(2^{2\alpha_k}\right)$$

თუ გამოვიყენებთ (4.10)-ს მივიღებთ, რომ $f\in H_p(G^2)$.

ადვილი სანახავია, რომ

$$\widehat{f}(i,j)=\begin{cases}\frac{2^{2\alpha_k(2/p-2)}}{\Phi^{1/4}\left(2^{2\alpha_k}\right)},\\ \text{ თუ }\ (i,j)\in\{2^{2\alpha_k},...,\ \ 2^{2\alpha_k+1}-1\}^2,k\in\mathbb{N}_+,\\ 0,\\ \text{ თუ }\ (i,j)\notin\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{2^{2\alpha_k},...,\ \ 2^{2\alpha_k+1}-1\}^2.\end{cases}\tag{4.11}$$

ვთქვათ $2^{2\alpha_k}<n<2^{2\alpha_k+1}$. (4.11)-ის და ლემა 2.2.1-ის პირველი ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}&S_{n,n}f\left(x^1,x^2\right)\\ =&\sum_{i=0}^{2^{\alpha_{k-1}+1}-1}\sum_{j=0}^{2^{\alpha_{k-1}+1}-1}\widehat{f}(i,j)w_i\left(x^1\right)w_j\left(x^2\right)\\ +&\sum_{i=2^{\alpha_k}}^{n-1}\sum_{j=2^{\alpha_k}}^{n-1}\widehat{f}(i,j)w_i\left(x^1\right)w_j\left(x^2\right)\\ =&\sum_{\eta=0}^{k-1}\sum_{i=2^{\alpha_\eta}}^{2^{\alpha_\eta+1}-1}\sum_{j=2^{\alpha_\eta}}^{2^{\alpha_\eta+1}-1}\widehat{f}(i,j)w_i\left(x^1\right)w_j\left(x^2\right)\\ +&\sum_{i=2^{\alpha_k}}^{n-1}\sum_{j=2^{\alpha_k}}^{n-1}\widehat{f}(i,j)w_i\left(x^1\right)w_j\left(x^2\right)\\ =&\sum_{\eta=0}^{k-1}\sum_{i=2^{\alpha_\eta}}^{2^{\alpha_\eta+1}-1}\sum_{j=2^{\alpha_\eta}}^{2^{\alpha_\eta+1}-1}\frac{2^{\alpha_\eta(2/p-2)}}{\Phi^{1/4}\left(2^{\alpha_\eta}\right)}w_i\left(x^1\right)w_j\left(x^2\right)\\ +&\sum_{i=2^{\alpha_k}}^{n-1}\sum_{j=2^{\alpha_k}}^{n-1}\frac{2^{\alpha_k(2/p-2)}}{\Phi^{1/4}\left(2^{\alpha_k}\right)}w_i\left(x^1\right)w_j\left(x^2\right)\\ =&\sum_{\eta=0}^{k-1}\frac{2^{\alpha_\eta(2/p-2)}}{\Phi^{1/4}\left(2^{\alpha_\eta}\right)}\left(D_{2^{\alpha_\eta+1}}\left(x^1\right)-D_{2^{\alpha_\eta}}\left(x^1\right)\right)\left(D_{2^{\alpha_\eta+1}}\left(x^2\right)-D_{2^{\alpha_\eta}}\left(x^2\right)\right)\\ +&\frac{2^{\alpha_k(2/p-2)}}{\Phi^{1/4}\left(2^{\alpha_k}\right)}\left(D_n\left(x^1\right)-D_{2^{\alpha_k}}\left(x^1\right)\right)\left(D_n\left(x^2\right)-D_{2^{\alpha_k}}\left(x^2\right)\right)\\ =&I+II.\end{aligned}\tag{4.12}$$

ვთქვათ $(x^1,x^2)\in(G\backslash I_1)^2$ და n არის კენტი რიცხვი. მას შემდეგ რაც $n-2^{2\alpha_k}$ არის კენტი, ლემა 2.2.2-ის ორივე ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
|II| &= \frac{2^{2\alpha_k(2/p-2)}}{\Phi^{1/4}\left(2^{2\alpha_k}\right)}\left|w_{2^{2\alpha_k}}\left(x^1\right)D_{n-2^{2\alpha_k}}\left(x^1\right)w_{2^{2\alpha_k}}\left(x^2\right)D_{n-2^{2\alpha_k}}\left(x^2\right)\right| \qquad (4.13)\\
&= \frac{2^{2\alpha_k(2/p-2)}}{\Phi^{1/4}\left(2^{2\alpha_k}\right)}\left|w_{2^{2\alpha_k}}\left(x^1\right)w_{n-2^{2\alpha_k}}\left(x^1\right)D_1\left(x^1\right)w_{2^{2\alpha_k}}\left(x^2\right)w_{n-2^{2\alpha_k}}\left(x^2\right)D_1\left(x^2\right)\right|\\
&= \frac{2^{2\alpha_k(2/p-2)}}{\Phi^{1/4}\left(2^{2\alpha_k}\right)}.
\end{aligned}
$$

თუ მივმართავთ ისევ 2.2.2-ის მეორე ტოლობას და $\alpha_n \geq 2$ $(n \in \mathbb{N})$ პირობას, მაშინ I-თვის გვაქვს

$$
I = \sum_{\eta=0}^{k-1}\frac{2^{2\alpha_k(2/p-2)}}{\Phi^{1/4}\left(2^{2\alpha_\eta}\right)}\left(D_{2^{2\alpha_\eta+1}}\left(x^1\right)-D_{2^{2\alpha_\eta}}\left(x^1\right)\right)\left(D_{2^{\alpha_\eta+1}}\left(x^2\right)-D_{2^{\alpha_\eta}}\left(x^2\right)\right)=0. \qquad (4.14)
$$

აქედან

$$
\begin{aligned}
&\left\|S_{n,n}f\left(x^1,x^2\right)\right\|_{weak-L_p(G^2)} \qquad (4.15)\\
\geq\ & \frac{2^{2\alpha_k(2/p-2)}}{2\Phi^{1/4}\left(2^{2\alpha_k}\right)}\left(\mu\left\{\left(x^1,x^2\right)\in\left(G\backslash I_1\right)^2:\left|S_{n,n}f\left(x^1,x^2\right)\right|\geq\frac{2^{2\alpha_k(2/p-2)}}{2\Phi^{1/4}\left(2^{2\alpha_k}\right)}\right\}\right)^{1/p}\\
\geq\ & \frac{2^{2\alpha_k(2/p-2)}}{2\Phi^{1/4}\left(2^{2\alpha_k}\right)}\left|\left(G\backslash I_1\right)^2\right|\geq\frac{c_p2^{2\alpha_k(2/p-2)}}{\Phi^{1/4}\left(2^{2\alpha_k}\right)}.
\end{aligned}
$$

(4.15)-დან მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{2^{2\alpha_k+1}-1}\frac{\left\|S_{n,n}f\right\|_{weak-L_p(G^2)}^p\Phi(n)}{n^{3-2p}} \qquad (4.16)\\
\geq\ & \sum_{n=2^{2\alpha_k}+1}^{2^{2\alpha_k+1}-1}\frac{\left\|S_{n,n}f\right\|_{weak-L_p(G^2)}^p\Phi(n)}{n^{3-2p}}\\
\geq\ & c_p\Phi\left(2^{2\alpha_k}\right)\sum_{n=2^{\alpha_k-1}+1}^{2^{\alpha_k}-1}\frac{\left\|S_{2n+1,2n+1}f\right\|_{weak-L_p(G^2)}^p}{(2n+1)^{3-2p}}\\
\geq\ & c_p\Phi\left(2^{2\alpha_k}\right)\frac{2^{2\alpha_k(1-p)}}{\Phi^{1/4}\left(2^{2\alpha_k}\right)}\sum_{n=2^{2\alpha_k-1}+1}^{2^{2\alpha_k}-1}\frac{1}{(2n+1)^{3-2p}}\\
\geq\ & c_p\Phi^{3/4}\left(2^{2\alpha_k}\right)\to\infty, \qquad \text{როცა } k\to\infty.
\end{aligned}
$$

თეორემა დამტკიცებულია.

□

4.4 ორგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების მარცინკევიჩის საშუალოების ძლიერად შეჯამებადობა მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე

ამ თავში დავამტკიცებულია ორგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების მარცინკევიჩის საშუალოების ძლიერად შეჯამებადობის თეორემები $p = 2/3$-თვის (დეტალებისთვის იხ. ნოჯი და ტეფნაძე [23]).

თეორემა 4.4.1. *ვთქვათ $f \in H_{2/3}(G^2)$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c, ისეთი, რომ*

$$\frac{1}{\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\|\mathcal{M}_m f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3}}{m} \leq c\,\|f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ დავუშვებთ, რომ უკვე დამტკიცებულია პირობა:

$$\frac{1}{\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\|\mathcal{M}_m f\|_{2/3}^{2/3}}{m} \leq c\,\|f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3}. \tag{4.17}$$

ლემა 4.2.9-ის და (1.18), (1.22), (4.17) უტოლობების დახმარებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\|\mathcal{M}_m f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3}}{m} \\ \leq\ & \frac{1}{\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\|\mathcal{M}_m f\|_{2/3}^{2/3}}{m} \\ +\ & \left\|\widetilde{\mathcal{M}}_{\#}^{*} f\right\|_{2/3}^{2/3} + \left\|\widetilde{S}_{\#}^{*} f\right\|_{2/3}^{2/3} \\ \leq\ & \|f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

მას შემდეგ რაც $\mathcal{M}_n$ არის (იხ. ლემა 4.2.1) შემოსაზღვრული $L_\infty(G^2)$-დან $L_\infty(G^2)$-ში, ლემა 4.2.6-ის გამოყენებით დავადგენთ, რომ საკმარისია შემოწმდეს მხოლოდ შემდეგი უტოლობა ნებისმიერი $2/3$-ატომ a-თვის

$$\frac{1}{\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\|\mathcal{M}_m a\|_{2/3}^{2/3}}{m} < c < \infty.$$

ვთქვათ a არის $2/3$-ატომი, რომლის სუპორტიც მოთავსებულია I^2-ში, სადაც $\mu(I^2) = 2^{-2N}$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $I^2 := I_N^2$. ადვილი სანახავია, რომ $\mathcal{M}_n a = 0$ როცა $n \leq 2^N$, ამიტომ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $n > 2^N$.

შეგვიძლია დავწეროთ

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\|\mathcal{M}_m a\|_{2/3}^{2/3}}{m}\\
&\leq \frac{1}{\log n}\sum_{m=2^N}^{n}\frac{\|\mathcal{M}_m a\|_{2/3}^{2/3}}{m}\\
&\leq \frac{1}{\log n}\sum_{m=2^N}^{n}\int_{I_N\times I_N}\frac{|\mathcal{M}_m a|^{2/3}}{m}d\mu\\
&+\frac{1}{\log n}\sum_{m=2^N}^{n}\int_{I_N\times \overline{I_N}}\frac{|\mathcal{M}_m a|^{2/3}}{m}d\mu\\
&+\frac{1}{\log n}\sum_{m=2^N}^{n}\int_{\overline{I_N}\times I_N}\frac{|\mathcal{M}_m a|^{2/3}}{m}d\mu\\
&+\frac{1}{\log n}\sum_{m=2^N}^{n}\int_{\overline{I_N}\times \overline{I_N}}\frac{|\mathcal{M}_m a|^{2/3}}{m}d\mu\\
&=: I_1+I_2+I_3+I_4.
\end{aligned}
$$

ლემა 4.2.1-ის გამოყენება მოგვცემს

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{1}{\log n}\sum_{m=2^N}^{\infty}\int_{I_N\times I_N}\frac{|\mathcal{M}_m a|^{2/3}}{m}d\mu\\
&\leq \frac{1}{\log n}\sum_{m=2^N}^{\infty}\frac{1}{m}\|a\|_{\infty}^{2/3}/2^{2N}\\
&\leq \frac{1}{\log n}\sum_{m=2^N}^{n}\frac{1}{m}<c<\infty.
\end{aligned}
$$

ახლა შევაფასებთ I_2-ს. ჩვენ შემოვიტანთ შემდეგ აღნიშვნას

$$J_t := I_t\backslash I_{t+1},\quad (t\in\mathbb{N}).$$

მაშინ შეგვიძლია მოვახდინოთ $\overline{I_N}$-ის და J_{m^2}-ის შემდეგი დეკომპოზიცია, როგორც შემდეგი თანაუკვეთი სიმრავლეების გაერთიანება:

$$\overline{I_N}=\bigcup_{m^2=0}^{N-1}J_{m^2},\quad J_{m^2}=\bigcup_{q^2=m^2+1}^{N}I_N^{m^2,q^2}, \tag{4.19}$$

სადაც

$$I_N^{m^2,q^2}:=\begin{cases}I_{q^2+1}(0,...,0,x_{m^2}=1,0,...,0,x_{q^2}=1), & \text{სადაც}\quad m^2<q^2<N,\\ I_N(0,...,0,x_{m^2}=1,0,...,0), & \text{სადაც}\quad q^2=N.\end{cases}$$

ვთქვათ $(x^1,x^2)\in I_N\times I_N^{m^2,q^2}$. ლემა 4.2.3-ის გამოყენება დაუყოვნებლივ მოგვცემს

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{M}_n a(x^1,x^2)| \\
\leq\ & \|a\|_\infty \int_{I_N\times I_N} |K_n(x^1+t^1,x^2+t^2)|d\mu(t^1,t^2) \\
\leq\ & c2^{3N}\frac{2^{m^2}}{n2^N}\sum_{s=m^2}^{q^2} D_{2^s}(x^2+e_{m^2}) \\
\leq\ & \frac{c2^{2N+m^2}}{n}\sum_{s=m^2}^{q^2} 2^s \\
\leq\ & \frac{c2^{2N+m^2+q^2}}{n}.
\end{aligned}$$

აქედან

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{c2^{4N/3}}{\log n}\sum_{m=2^N}^{n}\sum_{m^2=0}^{N-1}\sum_{q^2=m^2+1}^{N}\int_{I_N\times I_N^{m^2,q^2}}\frac{|\mathcal{M}_m a|^{2/3}}{m}d\mu \\
&\leq \frac{c2^{4N/3}}{\log n}\sum_{m=2^N}^{n}\sum_{m^2=0}^{N-1}\sum_{q^2=m^2+1}^{N}\int_{I_N\times I_N^{m^2,q^2}}\frac{2^{2(m^2+q^2)/3}}{m^{5/3}}d\mu \\
&\leq \frac{c2^{4N/3}}{\log n}\sum_{m=2^N}^{n}\sum_{m^2=0}^{N-1}\sum_{q^2=m^2+1}^{N}\frac{2^{2(m^2+q^2)/3}}{m^{5/3}}2^{-N-q^2} \\
&\leq \frac{c2^{N/3}}{\log n}\sum_{m=2^N}^{\infty}\frac{1}{m^{5/3}}\sum_{m^2=0}^{N-1}2^{2m^2/3}\sum_{q^2=m^2+1}^{N}2^{-q^2/3} \\
&\leq \frac{c2^{N/3}}{\log n}\sum_{m=2^N}^{\infty}\frac{2^{N/3}}{m^{5/3}} \\
&\leq \frac{c2^{2N/3}}{\log n}\sum_{m=2^N}^{\infty}\frac{1}{m^{5m/3}} \\
&\leq \frac{c}{N}.
\end{aligned}$$

ანალოგიურად შეგვიძლია დავამტკიცოთ $I_3\leq c<\infty$.

ეხლა დავამტკიცოთ I_4-ის შემოსაზღვრულობა. თუ გამოვიყენებთ (4.19)-ს შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq \frac{1}{\log n}\sum_{m=2^N}^{n}\sum_{l^1=0}^{N-1}\sum_{m^2=0}^{l^1-1}\int_{J_{l^1}\times J_{m^2}}\frac{|\mathcal{M}_m a|^{2/3}}{m}d\mu \\
&+ \frac{1}{\log n}\sum_{m=2^N}^{n}\sum_{l^1=0}^{N-1}\sum_{m^2=l^1}^{N-1}\int_{J_{l^1}\times J_{m^2}}\frac{|\mathcal{M}_m a|^{2/3}}{m}d\mu \\
&=: I_{4,1}+I_{4,2}.
\end{aligned}$$

განვიხილოთ $I_{4,2}$ (შეფასება $I_{4,1}$-ის დამტკიცება იქნება ანალოგიურად). ფიქსირებუ-

ლი $(x^1,x^2)\in J_{l^1}\times J_{m^2}$-თვის ჩვენ გამოვიყენებთ ლემა 4.2.2-ს, საიდანაც მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{M}_n a(x^1,x^2)| \\
&\le \|a\|_\infty \int_{I_N\times I_N} |K_n(x^1+t^1,x^2+t^2)|d\mu(t^1,t^2) \\
\le\ & \frac{2^{N+l^1-m^2}}{n}\sum_{r^1=l^1+1}^{m^2+1} 2^{r^1} D_{2^{m^2+1}}(x^1+e_{l^1}+e_{r^1}) \sum_{s=m^2+1}^{N} D_{2^s}(x^2+e_{m^2}+x^1_{m^2+1,s-1}) \\
&+\frac{2^{N+l^1+m^2}}{n}\sum_{s=l^1}^{m^2}\sum_{r^1=l^1+1}^{s} D_{2^s}(x^1+e_{l^1}+e_{r^1}).
\end{aligned}
$$

ადვილი სანახავია

$$
\begin{aligned}
&\int_{J_{l^1}\times J_{m^2}} D^{2/3}_{2^{m^2+1}}(x^1+e_{l^1}+e_{r^1})D^{2/3}_{2^s}(x^2+e_{m^2}+x^1_{m^2+1,s-1})d\mu(x^1,x^2) \\
&\le c2^{2s/3-m^2/3-l^1} \le c2^{-\left(m^2+s\right)/3}
\end{aligned}
$$

და

$$
\begin{aligned}
&\int_{J_{l^1}\times J_{m^2}} D^{2/3}_{2^s}(x^1+e_{l^1}+e_{r^1})d\mu(x^1,x^2) \\
&\le c2^{2s/3-m^2-l^1} \le c2^{-m^2-s/3}.
\end{aligned}
$$

საიდანაც მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
&\int_{J_{l^1}\times J_{m^2}} |\mathcal{M}_m a|^{2/3}\,d\mu \\
&\le \frac{c2^{2\left(N+l^1-m^2\right)/3}}{m^{2/3}}\sum_{r^1=l^1+1}^{m^2+1}\sum_{s=m^2+1}^{N} 2^{2r^1/3}\times \\
&\times \int_{J_{l^1}\times J_{m^2}} D^{2/3}_{2^{m^2+1}}(x^1+e_{l^1}+e_{r^1})D^{2/3}_{2^s}(x^2+e_{m^2}+x^1_{m^2+1,s-1})d\mu\left(x^1,x^2\right) \\
&+\frac{c2^{2\left(N+l^1+m^2\right)/3}}{m^{2/3}}\sum_{s=l^1}^{m^2}\sum_{r^1=l^1+1}^{s}\int_{J_{l^1}\times J_{m^2}} D^{2/3}_{2^s}(x^1+e_{l^1}+e_{r^1})d\mu(x^1,x^2) \\
\le\ & \frac{c2^{2(N+l^1-m^2)/3}}{m^{2/3}}\sum_{r^1=l^1+1}^{m^2+1} 2^{2r^1/3}\sum_{s=m^2+1}^{N} 2^{-\left(m^2+s\right)/3} \\
&+\frac{c2^{2(N+l^1+m^2)/3}}{m^{2/3}}\sum_{s=l^1}^{m^2}\sum_{r^1=l^1+1}^{s} 2^{-m^2-s/3} \\
\le\ & \frac{c2^{2(N+l^1-m^2)/3}}{m^{2/3}}2^{-2m^2/3}\sum_{r^1=l^1+1}^{m^2+1} 2^{2r^1/3} \\
&+\frac{c2^{2\left(N+l^1+m^2\right)/3}}{m^{2/3}}\sum_{s=l_1}^{m^2}(s-l_1-1)\,2^{-m^2-s/3} \\
\le\ & \frac{c2^{2\left(N+l^1-m^2\right)/3}}{m^{2/3}}+\frac{c2^{\left(2N+l^1-m^2\right)/3}}{m^{2/3}}.
\end{aligned}
$$

და

$$I_{4,2} \leq \frac{c}{\log n} \sum_{m=2^N}^{n} \frac{1}{m} \sum_{l^1=0}^{N-1} \sum_{m^2=l^1}^{N-1} \frac{2^{2(N+l^1-m^2)/3} + 2^{\left(2N-m^2+l^1\right)/3}}{m^{2/3}}$$
$$\leq \frac{c2^{2N/3}}{\log n} \sum_{m=2^N}^{n} \frac{1}{m^{5/3}} \sum_{l^1=0}^{N-1} 1 \leq c.$$

□

შედეგი 4.4.1. *ვთქვათ* $f \in H_{2/3}\left(G^2\right)$. *მაშინ*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{m=1}^{n} \frac{\|\mathcal{M}_m f - f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3}}{m} = 0$$

და

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{m=1}^{n} \frac{\|\mathcal{M}_m f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3}}{m} = \|f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3}.$$

4.5 უწყვეტობის მოდულები და ორგანზომილებიანი ფურიე -უოლშის მწკრივების მარცინკევიჩის საშუალოების ნორმით კრებადობა მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე

ამ თავში მიღებული იქნება აუცილებელი და საკმარისი პირობები მარტინგალის უწყვეტობის მოდულისთვის, რომლებიც უზრუნველყოფს ამ მარტინგალის ორგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების მარცინკევიჩის საშუალოების შემოსაზღვრულობას (კრებადობას) მარტინგალურ ჰარდის სივრცეებზე, როცა $p = 2/3$ (დეტალებისთვის იხ. [25]).

თეორემა 4.5.1. *ა) ვთქვათ* $f \in H_{2/3}(G^2)$ *და*

$$\omega_{H_{2/3}(G^2)}\left(\frac{1}{2^k}, f\right) = o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right), \text{როცა } k \to \infty. \tag{4.20}$$

მაშინ

$$\|\mathcal{M}_n f - f\|_{H_{2/3}(G^2)} \to 0, \text{ როცა } n \to \infty.$$

ბ) არსებობს მარტინგალი $f \in H_{2/3}(G^2)$, *რომლისთვისაც*

$$\omega_{H_{2/3}(G^2)}\left(\frac{1}{2^{2^k}}, f\right) = O\left(\frac{1}{2^{3k/2}}\right), \text{ როცა } k \to \infty$$

და

$$\|\mathcal{M}_n f - f\|_{2/3} \nrightarrow 0 \text{ როცა } n \to \infty.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ნოჯიმ [22] დაამტკიცა, (იხ. უტოლობა (1.23)) რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$\|\mathcal{M}_n f\|_{2/3} \leq c \log^{2/3}(n+1) \|f\|_{H_{2/3}(G^2)} . \tag{4.21}$$

შეფასება (1.22)-ის და ლემა 4.2.9-ის და (4.21)-ის დახმარებით ადვილად შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი შეფასება

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{M}_n f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} \\ &\leq \|\mathcal{M}_n f\|_{2/3}^{2/3} + \left\|\widetilde{\mathcal{M}}_{\#}^{*} f\right\|_{2/3}^{2/3} + \left\|\widetilde{S}_{\#}^{*} f\right\|_{2/3}^{2/3} \\ &\leq c \log(n+1) \|f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} + c \|f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} \\ &\leq c \log(n+1) \|f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} . \end{aligned} \tag{4.22}$$

ვთქვათ $2^N < n \leq 2^{N+1}$. მაშინ (4.22)-ის გამოყენებით და მარტივი გარდაქმნების დახმარებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{M}_n f - f\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} \\ &\leq \left\|\mathcal{M}_n f - \mathcal{M}_n S_{2^N,2^N} f\right\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} \\ &+ \left\|\mathcal{M}_n S_{2^N,2^N} f - S_{2^N,2^N} f\right\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} \\ &+ \left\|S_{2^N,2^N} f - f\right\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} \\ &= \left\|\mathcal{M}_n \left(S_{2^N,2^N} f - f\right)\right\|_{H_{2/3}}^{2/3} \\ &+ \left\|\mathcal{M}_n S_{2^N,2^N} f - S_{2^N,2^N} f\right\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} \\ &+ \left\|S_{2^N,2^N} f - f\right\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} \\ &\leq c \left(\log(n+1) + 1\right) \omega_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} \left(\frac{1}{2^N}, f\right) \\ &+ \left\|\mathcal{M}_n S_{2^N,2^N} f - S_{2^N,2^N} f\right\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} . \end{aligned}$$

ვთქვათ $2^N < n \leq 2^{N+1}$. მაშინ ადვილი საჩვენებელია შემდეგი მარტივი ტოლობების

სამართლიანობა

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}_n S_{2^N,2^N} f - S_{2^N,2^N} f \\
= & \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2^N} S_{k,k} S_{2^N,2^N} f \\
+ & \frac{1}{n}\sum_{k=2^N+1}^{n} S_{k,k} S_{2^N,2^N} f - S_{2^N,2^N} f \\
= & \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2^N} S_{k,k} f \\
+ & \frac{\left(n-2^N\right) S_{2^N,2^N} f}{n} - S_{2^N,2^N} f \\
= & \frac{2^N}{n}\left(\mathcal{M}_{2^N} f - S_{2^N,2^N} f\right) \\
= & \frac{2^N}{n}\left(S_{2^N,2^N}\mathcal{M}_{2^N} f - S_{2^N,2^N} f\right) \\
= & \frac{2^N}{n} S_{2^N,2^N}\left(\mathcal{M}_{2^N} f - f\right).
\end{aligned}$$

საიდანაც თუ გამოვიყენებთ ორგანზომილებიანი ფურიე-უოლშის მწკრივების კერძო ჯამების და მარცინკევიჩის საშუალოების 2^n ქვემიმდევრობის შესახებ მოყვანილი (1.19)-ს და (1.21)-ს თეორემების დახმარებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
& \left\|\mathcal{M}_n S_{2^N,2^N} f - S_{2^N,2^N} f\right\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} \\
\leq & \left(\frac{2^N}{n}\right)^{2/3}\left\|S_{2^N,2^N}\left(\mathcal{M}_{2^N} f - f\right)\right\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} \\
\leq & \left\|S_{2^N,2^N}\left(\mathcal{M}_{2^N} f - f\right)\right\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} \\
\leq & \left\|\mathcal{M}_{2^N} f - f\right\|_{H_{2/3}(G^2)}^{2/3} \to 0, \text{ როცა } k \to \infty,
\end{aligned} \tag{4.23}$$

საიდანაც დაუყოვნებლივ მივიღებთ, რომ თუ

$$\omega_{H_{2/3}(G^2)}\left(\frac{1}{2^n}, f\right) = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \text{ როცა } n \to \infty,$$

მაშინ

$$\|\mathcal{M}_n f - f\|_{H_{2/3}(G^2)} \to 0, \text{ როცა } n \to \infty.$$

რაც ასრულებს თეორემის პირველი ნაწილის დამტკიცებას.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა 4.5.1-ის მეორე ნაწილი.

ვთქვათ

$$a_i(x^1, x^2) = 2^{2^i}\left(D_{2^{2^i+1}}(x^1) - D_{2^{2^i}}(x^1)\right)\left(D_{2^{2^i+1}}(x^2) - D_{2^{2^i}}(x^2)\right)$$

და

$$f_n(x^1, x^2) = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(x^1, x^2)}{2^{3i/2}}.$$

მას შემდეგ რაც

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{3i/2}}\right)^{2/3} < c < \infty$$

$$\begin{aligned} & S_{2^n,2^n}a_k(x^1,x^2) \\ = & \begin{cases} a_k(x^1,x^2), & \text{თუ } \ 2^k \leq n, \\ 0, & \text{თუ } \ 2^k > n \end{cases} \end{aligned}$$

და

$$\begin{aligned} & \text{supp } a_k = I^2_{2^k}, \\ & \int_{I^2_{2^k}} a_k d\mu = 0, \\ & \|a_k\|_\infty \leq \mu(\text{supp } a_k)^{-3/2}, \end{aligned}$$

ლემა 4.2.5 დახმარებით დავასკვნით, რომ $f \in H_{2/3}$.

მეორე მხრივ, თუ გამოვიყენებთ შენიშვნა 4.1.1-ს ჩეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} & f - S_{2^n,2^n}f \\ = & \left(f^{(1)} - S_{2^n,2^n}f^{(1)}, ..., f^{(n)} - S_{2^n,2^n}f^{(n)}, ..., f^{(n+k)} - S_{2^n,2^n}f^{(n+k)}, ...\right) \\ = & \left(0, ..., 0, f^{(n+1)} - f^{(n)}, ..., f^{(n+k)} - f^{(n)}, ...\right) \\ = & \left(0, ..., 0, ..., \sum_{i=\log n+1}^{\log n+k} \frac{a_i(x)}{2^{3i/2}}, ...\right), \quad k \in \mathbb{N}_+, \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} & \omega_{H_{2/3}(G^2)}\left(\frac{1}{2^n}, f\right) \\ \leq & \sum_{i=[\log n]}^{\infty} \frac{1}{2^{3i/2}} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \quad \text{როცა } \ k \to \infty. \end{aligned}$$

სადაც $[\log n]$ აღნიშნავს $\log n$-ს მთელ ნაწილს.

ვთქვათ

$$\begin{aligned} n_{2^{A-2}} &= 2^{4\cdot 2^{A-2}} + 2^{4\cdot 2^{A-2}-4} + ... + 2^4 + 2^0 \\ &= 2^{2^A} + 2^{2^A-4} + ... + 2^4 + 2^0 \end{aligned}$$

როგორც ლემა 4.2.4-ში:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{n_{2^{k-2}}}f - f \\ = & \frac{2^{2^k}\mathcal{M}_{2^{2^k}}f}{n_{2^{k-2}}} + \frac{1}{n_{2^{k-2}}}\sum_{j=2^{2^k}+1}^{n_{2^{k-2}}} S_{j,j}f \\ - & \frac{2^{2^k}f}{n_{2^{k-2}}} - \frac{n_{2^{k-2}-1}f}{n_{2^{k-2}}} \end{aligned} \tag{4.24}$$

ადვილი სანახავია, რომ

$$\widehat{f}(i,j)=\begin{cases}\frac{2^{2^k}}{2^{3k/2}}, & \text{თუ } (i,j)\in\left\{2^{2^k},...,2^{2^k+1}-1\right\}^2,\ k\in\mathbb{N}\\ 0, & \text{თუ } (i,j)\notin\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\left\{2^{2^k},...,2^{2^k+1}-1\right\}^2.\end{cases} \tag{4.25}$$

ვთქვათ $2^{2^k}<j\leq n_{2^{k-1}}$. მას შემდეგ რაც $w_{v+2^{2^k}}=w_{2^{2^k}}w_v$, როცა $v<2^{2^k}$ თუ გავითვალისწინებთ (4.25)-ს და გამოვიყენებთ (4.25)-ს და ლემა 2.2.1-ის პირველ ტოლობას მივიღებთ

$$\begin{aligned}
& S_{j,j}f\left(x^1,x^2\right)\\
= & S_{2^{2^k},2^{2^k}}f\left(x^1,x^2\right)\\
+ & \sum_{v=2^{2^k}}^{j-1}\sum_{s=2^{2^k}}^{j-1}\widehat{f}(v,s)w_{v,s}\left(x^1,x^2\right)\\
= & S_{2^{2^k},2^{2^k}}f\left(x^1,x^2\right)\\
+ & \frac{2^{2^k}}{2^{3k/2}}\sum_{v=0}^{j-2^{2^k}-1}\sum_{s=0}^{j-2^{2^k}-1}w_{v+2^{2^k}}\left(x^1\right)w_{s+2^{2^k}}\left(x^2\right)\\
= & S_{2^{2^k},2^{2^k}}f\left(x^1,x^2\right)\\
+ & \frac{2^{2^k}w_{2^{2^k}}\left(x^1\right)w_{2^{2^k}}\left(x^2\right)}{2^{3k/2}}\sum_{v=0}^{j-2^{2^k}-1}\sum_{s=0}^{j-2^{2^k}-1}w_v\left(x^1\right)w_s\left(x^2\right)\\
= & S_{2^{2^k},2^{2^k}}f\left(x^1,x^2\right)\\
+ & \frac{2^{2^k}w_{2^{2^k}}\left(x^1\right)w_{2^{2^k}}\left(x^2\right)D_{j-2^{2^k},j-2^{2^k}}\left(x^1,x^2\right)}{2^{3k/2}}.
\end{aligned}$$

აქედან

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n_{2^{k-2}}}\sum_{j=2^{2^k}+1}^{n_{2^{k-2}}}S_{j,j}f\left(x^1,x^2\right)\\
= & \frac{n_{2^{k-2}-1}S_{2^{2^k},2^{2^k}}f\left(x^1,x^2\right)}{n_{2^{k-2}}}\\
& +\frac{2^{2^k}w_{2^{2^k}}\left(x^1\right)w_{2^{2^k}}\left(x^2\right)}{n_{2^{k-2}}2^{3k/2}}\sum_{j=1}^{n_{2^{k-2}-1}}D_{j,j}\left(x^1,x^2\right)\\
= & \frac{n_{2^{k-2}-1}S_{2^{2^k},2^{2^k}}f\left(x^1,x^2\right)}{n_{2^{k-2}}}\\
& +\frac{2^{2^k}w_{2^{2^k}}\left(x^1\right)w_{2^{2^k}}\left(x^2\right)n_{2^{k-2}-1}K_{n_{2^{k-2}-1}}\left(x^1,x^2\right)}{n_{2^{k-1}}2^{3k/2}}.
\end{aligned}$$

(4.24) ტოლობიდან მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{M}_{n_{2^{k-2}}}f-f\|_{2/3}^{2/3} \\
&\geq \frac{c}{2^k}\|n_{2^{k-2}-1}K_{n_{2^{k-2}-1}}\|_{2/3}^{2/3} \\
&-\left(\frac{2^{2^k}}{n_{2^{k-2}}}\right)^{2/3}\|\mathcal{M}_{2^{2^k}}f-f\|_{2/3}^{2/3} \\
&-\left(\frac{n_{2^{k-2}-1}}{n_{2^{k-2}}}\right)^{2/3}\|S_{2^{2^k},2^{2^k}}f-f\|_{2/3}^{2/3} \\
&\geq \frac{c}{2^k}\|n_{2^{k-2}-1}K_{n_{2^{k-2}-1}}\|_{2/3}^{2/3} \\
&-\|\mathcal{M}_{2^{2^k}}f-f\|_{2/3}^{2/3} \\
&-\|S_{2^{2^k},2^{2^k}}f-f\|_{2/3}^{2/3}.
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

ვთქვათ

$$
\begin{aligned}
& x^1 \in I_{2^{k-2}}^{m,l} \\
=: \quad & I_{2^{k-2}}\left(0,...,0,x_{4m}^1=1,0,...,0,x_{4l}^1=1,x_{4l+1}^1,...,x_{2^{k-2}-1}^1\right)
\end{aligned}
$$

და

$$
\begin{aligned}
& x^2 \in J_{2^{k-2}}^{l,q} \\
=: \quad & I_{2^{k-2}}\left(0,...,0,x_{4l}^2=1,x_{4l+1}^1...,x_{4q-1}^1,1-x_{4q}^1,x_{4q+1}^2,...,x_{2^{k-2}-1}^2\right).
\end{aligned}
$$

თუ გამოვიყენებთ ლემა 4.2.4-ს შეგვიძლია დავწეროთ

$$
n_{_{2^{k-2}-1}}\left|K_{n_{2^{k-2}-1}}\left(x^1,x^2\right)\right| \geq 2^{4q+4l+4m-3}.
$$

საიდანაც მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
&\int_G (n_{_{2^{k-2}-1}}|K_{n_{2^{k-2}-1}}(x^1,x^2)|)^{2/3}d\mu(x^1,x^2) \\
&\geq c\sum_{m=1}^{2^{k-2}-3}\sum_{l=m+1}^{2^{k-2}-2}\sum_{q=l+1}^{2^{k-2}-1}\sum_{x_{4l+1}^1=0}^{1}\cdots\sum_{x_{2^{k-2}-1}^1=0}^{1}\sum_{x_{4q+1}^2=0}^{1}\cdots\sum_{x_{2^{k-2}-1}^2=0}^{1} \\
&\int_{I_{2^{k-2}}^{m,l}\times J_{2^{k-2}}^{l,q}}(n_{2^{k-2}-1}|K_{n_{2^{k-2}-1}}(x^1,x^2)|)^{2/3}d\mu(x^1,x^2) \\
&\geq c\sum_{m=1}^{2^{k-2}-3}\sum_{l=m+1}^{2^{k-2}-2}\sum_{q=l+1}^{2^{k-2}-1}\sum_{x_{4l+1}^1=0}^{1}\cdots\sum_{x_{2^{k-2}-1}^1=0}^{1}\sum_{x_{4q+1}^2=0}^{1}\cdots\sum_{x_{2^{k-2}-1}^2=0}^{1} \\
&\mu\left(I_{2^{k-2}}^{m,l}\times J_{2^{k-2}}^{l,q}\right)2^{(8q+8l+8m)/3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\geq c \sum_{m=1}^{2^{k-2}-3} \sum_{l=m+1}^{2^{k-2}-2} \sum_{q=l+1}^{2^{k-2}-1} 2^{(8q+8l+8m)/3} 2^{2^{k-2}-4l} 2^{2^{k-2}-4q} \left(\frac{1}{2^{2^{k-2}}}\right)^2 \\
&\geq c \sum_{m=1}^{2^{k-2}-3} 2^{8m/3} \sum_{l=m+1}^{2^{k-2}-2} 2^{-4l/3} \sum_{q=l+1}^{2^{k-2}-1} 2^{-4q/3} \\
&\geq c \sum_{m=1}^{2^{k-2}-3} 1 \geq c2^k.
\end{aligned}
$$

(1.17)-ის, (1.21)-ის და (4.26)-ის გამოყენებით ჩვენ გვაქვს

$$\limsup_{k\to\infty} \|\mathcal{M}_{n_{2^{k-2}}} f - f\|_{2/3} \geq c > 0.$$

თეორემა 4.5.1 დამტკიცებულია.

$\square$

ბიბლიოგრაია

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] *G. N. Agaev, N. Ya. Vilenkin, G. M. Dzhafarly and A. I. Rubinshtein,* Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups, Baku, Ehim, 1981 (in Russian).

[2] *N. K. Bary,* Trigonometric series, Gos. Izd. Fiz. Mat. Lit. Moscow 1961.

[3] *I. Blahota, G. Gàt and U. Goginava,* Maximal operators of Fejér means of double Vilenkin-Fourier series, Colloq. Math. 107 (2007), no. 2, 287–296.

[4] *I. Blahota, G. Gàt and U. Goginava,* Maximal operators of Fejér means of Vilenkin-Fourier series, J. Inequal. Pure Appl. Math. 7 (2006), no. 4, Article 149, 7 pp. (electronic).

[5] *N. I. Fine,* On Walsh function, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949), 372-414.

[6] V.A. Glukhov, On the summability of multiple Fourier series with respect to multiplicative systems, Mat. Zametki 39 (1986), 665-673, (Russian).

[7] *N. J. Fujii,* A maximal inequality for H^1-functions on a generalized Walsh-Paley group, Proc. Amer. Math. Soc. 77 (1979), no. 1, 111-116.

[8] *G. Gàt,* Cesàro means of integrable functions with respect to unbounded Vilenkin systems, J. Approx. Theory 124 (2003), no. 1, 25–43.

[9] *G. Gàt*, Investigations of certain operators with respect to the Vilenkin system, Acta Math. Hungar. 61 (1993), no. 1-2, 131–149.

[10] *G. Gàt and U. Goginava,* Uniform and L-convergence of logarithmic means of Walsh-Fourier series, Acta Math. Sin. 22 (2006), no. 2, 497–506.

[11] *U. Goginava,* The maximal operator of the (C,α) means of the Walsh-Fourier series, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. 26 (2006), 127–135.

[12] *U. Goginava,* Maximal operators of Fejér means of double Walsh-Fourier series, Acta Math. Hungar. 115 (2007), no. 4, 333–340.

[13] *U. Goginava,* Maximal operators of Fejér-Walsh means, Acta Sci. Math. (Szeged) 74 (2008), no. 3-4, 615–624.

[14] *U. Goginava,* The maximal operator of the Fejér means of the character system of the p-series field in the Kaczmarz rearrangement, Publ. Math. Debrecen 71 (2007), no. 1-2, 43–55.

[15] U. Goginava, The maximal operator of Marcinkiewicz-Fejér means of the d-dimensional Walsh-Fourier series. East J. Approx. 12 (3) (2006), 295-302.

[16] *U. Goginava,* On the uniform convergence of Walsh-Fourier series, Acta Math. Hungar. 93 (2001), no. 1-2, 59–70.

[17] *U. Goginava,* The weak type inequality for the Walsh system, Studia Math. 185 (1) (2008), 35-48.

[18] *U. Goginava,* A note on the Walsh-Fejer means, Anal. Theory Appl. 26, 4 (2010), 320-325.

[19] *U. Goginava and L. D. Gogoladze,* Strong convergence of cubic partial sums of two-dimensional Walsh-Fourier series, Constructive theory of functions, Prof. M. Drinov Acad. Publ. House, Sofia, 2012, 108–117.

[20] *U. Goginava and K. Nagy,* On the maximal operator of Walsh-Kaczmarz-Fejér means, Czechoslovak Math. J. 61(136) (2011), no. 3, 673–686.

[21] *B. I. Golubov, A. V. Efimov* and *V. A. Skvortsov,* Walsh series and transforms, (Russian) Nauka, Moscow, 1987, English transl: Mathematics and its Applications, 64. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[22] *K. Nagy,* On the maximal operator of Walsh-Marcinkiewicz means, Publ. Math. Debrecen. 78 (3-4) (2011), 633-646.

[23] *K. Nagy, G. Tephnadze,* Strong convergence theorem for Walsh-Marcinkiewicz means, Math. Inequal. Appl., 19, 1 (2016), 185–195.

[24] *K. Nagy, G. Tephnadze,* Approximation by Walsh-Marcinkiewicz means on the Hardy space $H_{2/3}$, Kyoto J. Math., 54 (3), (2014), 641-652.

[25] *K. Nagy, G. Tephnadze,* On the Walsh-Marcinkiewicz means on the Hardy space, Cent. Eur. J. Math., 12 (8), (2014), 1214-1228.

[26] *L. E. Persson, G. Tephnadze and P. Wall,* Maximal operators of Vilenkin-Nörlund means, J. Fourier Anal. Appl., 21, (2015), no. 1, 76-94.

[27] *L. E. Persson and G. Tephnadze,* A note on Vilenkin-Fejér means on the martingale Hardy space H_p, Bulletin of TICMI, Vol. 18, (2014), no. 1, 55-64.

[28] *L. E. Persson and G. Tephnadze,* A sharp boundedness result concerning some maximal operators of Vilenkin-Fejér means, Mediter. Math. J. DOI: 10.1007/s00009-015-0565-8.

[29] *F. Schipp,* Certain rearrangements of series in the Walsh system, 18 (1975), no. 2, 193–201.

[30] *F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon and J. Pál,* Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis, Adam Hilger, Ltd., Bristol, 1990.

[31] *P. Simon,* Cesaro summability with respect to two-parameter Walsh systems, Monatsh. Math. 131 (2000), no. 4, 321–334.

[32] *P. Simon,* Strong convergence of certain means with respect to the Walsh-Fourier series, Acta Math. Hungar. 49 (1987), no. 3-4, 425–431.

[33] *P. Simon,* A note on the Sunouchi operator with respect to Vilenkin system, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 43 (2000), 101–116.

[34] *P. Simon,* Strong convergence theorem for Vilenkin-Fourier series, J. Math. Anal. Appl. 245 (2000), no. 1, 52–68.

[35] *P. Simon and F. Weisz,* Weak inequalities for Cesàro and Riesz summability of Walsh-Fourier series, J. Approx. Theory 151 (2008), no. 1, 1–19.

[36] *B. Smith,* A strong convergence theorem for $H_1(T)$, Banach spaces, harmonic analysis, and probability theory (Storrs, Conn., 1980/1981), 169–173,

[37] *G. Tephnadze,* On the maximal operators of Vilenkin-Fejér means, Turkish J. Math. 37 (2013), no. 2, 308–318.

[38] *G. Tephnadze,* On the maximal operators of Vilenkin-Fejér means on Hardy spaces, Math. Inequal. Appl. 16 (2013), no. 1, 301–312.

[39] *G. Tephnadze,* A note on the Fourier coefficients and partial sums of Vilenkin-Fourier series, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhàzi. 28 (2012), no. 2, 167–176.

[40] *G. Tephnadze,* On the maximal operators of Walsh-Kaczmarz-Fejér means, Period. Math. Hung., 67, 1 (2013), 33-45.

[41] *G. Tephnadze,* Strong convergence theorems for Walsh-Fejér means, Acta Math. Hungar. 142 (2014), no. 1, 244–259.

[42] *G. Tephnadze,* A note on the norm convergence by Vilenkin-Fejér means, Georgian Math. J. 21 (2014), no. 4, 511–517.

[43] *G. Tephnadze,* On the partial sums of Vilenkin-Fourier series, J. Contemp. Math. Anal. 49 (2014), no. 1, 23–32.

[44] *G. Tephnadze,* On the Vilenkin-Fourier coefficients, Georgian Math. J. 20 (2013), no. 1, 169-177.

[45] *G. Tephnadze,* On the partial sums of Walsh-Fourier series, Colloquium Mathematicum, 141, 2 (2015), 227-242.

[46] *G. Tephnadze,* On the convergence of Fejér means of Walsh-Fourier series in the space H_p, J. Contemp. Math. Anal., 51, 2 (2016), 51-63.

[47] *G. Tephnadze,* A note on the strong convergence of two-dimensional Walsh-Fourier series, Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, 162, (2013), 93-97.

[48] *G. Tephnadze,* Strong convergence of two-dimensional Walsh-Fourier series, Ukr. Math. J., 65, (6), (2013), 822-834.

[49] *G. Tephnadze,* Martingale Hardy spaces and summability of the one dimensional Vilenkin-Fourier series, PhD thesis, Department of Engineering Sciences and Mathematics, Luleå University of Technology, Oct. 2015 (ISSN 1402-1544).

[50] *F. Weisz,* Strong convergence theorems for two-parameter Walsh-Fourier and trigonometric-Fourier series, Studia Math. 117 (1996), no. 2, 173–194.

[51] *F. Weisz,* Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis, Lecture Notes in Mathematics, 1568. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[52] *F. Weisz,* Hardy spaces and Cesàro means of two-dimensional Fourier series, Approximation theory and function series (Budapest, 1995), 353–367, Bolyai Soc. Math. Stud., 5, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996.

[53] *F. Weisz,* Cesàro summability of one- and two-dimensional Walsh-Fourier series, Anal. Math. 22 (1996), no. 3, 229–242.

[54] *F. Weisz,* Weak type inequalities for the Walsh and bounded Ciesielski systems, Anal. Math. 30 (2004), no. 2, 147–160.

[55] *F. Weisz,* Summability of multi-dimensional Fourier series and Hardy spaces, Mathematics and its Applications, 541. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[56] *F. Weisz,* Convergence of double Walsh-Fourier series and Hardy spaces, Approx. Theory Appl. 17 (2001), 32-44.